

1919.

GENERAL LIBRARY

MAR - 8 1900

No. 19.

UNIV. OF MICH.
ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 60. Heft 8.

DER GANZEN REIHE 365. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEHEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 66 M.

Ausgegeben am 20. Oktober 1919.

Inhalt.

	Seite
1. Fr. Hoffmann und W. Meißner. Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt	201
2. Robert Scheuermann. Über die Gestalt und die Auflösung des fallenden Flüssigkeitsstrahles	238
3. K. Siebel. Über die Änderung der Thermokraft und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-Natriumlegierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand	260
4. F. Krüger. Zur Hydrodynamik der Hiebtöne	279
5. R. H. Weber. Über Gay-Lussac- und Boyle-Temperaturen	291

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuseichern). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahressahl aufzuführen.





ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

**1. Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung
beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt¹⁾;
von Fr. Hoffmann und W. Meißner.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: Einleitung. — § 1. Die photometrische Einrichtung. — § 2. Die benutzten Hohlräumstrahler nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip und die Eichung derselben. — § 3. Der Hohlräumstrahler im schmelzenden Metall und die zugehörigen Schmelzpunktsbestimmungen. — § 4. Die verwendeten Metalle. — § 5. Die Messungen selbst und ihre Ergebnisse für die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold-, Kupfer- und Palladiumschmelzpunkt. — § 6. Folgerungen für die Temperaturskala oberhalb des Goldschmelzpunktes. — Zusammenfassung.

Der Schmelzpunkt des Palladiums ist von Holborn und Valentiner²⁾ und mit vervollkommenen Mitteln von Day und Sosman³⁾ an das Gasthermometer angeschlossen worden.

Ferner ist er mit optischen Methoden verschiedentlich bestimmt worden: zunächst von Holborn und Henning⁴⁾, die die Temperatur eines Palladiumbleches im Augenblick des Schmelzens mit dem Holborn-Kurlbaum-Pyrometer unter Berücksichtigung des Reflexionsvermögens maßen, aber dabei mehr die Erweiterung der Temperaturmeßmethoden als die Fixpunktsbestimmung im Auge hatten, sodann von Nernst und v. Wartenberg⁵⁾, die die Temperatur einer Querwand in

1) Die Arbeit ist im Jahre 1912 abgeschlossen worden. Die Ergebnisse sind in der Zeitschr. f. Instrumentenk. 32. S. 201—202, 1912 und 33. S. 156—157. 1913 veröffentlicht worden. Die vorliegende ausführliche Publikation wurde durch den Krieg verzögert.

2) L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. 22. S. 1—48. 1907.

3) Arthur L. Day u. Robert B. Sosman, High temperature gas thermometry, 129 S. Carnegie Institution of Washington. 1911.

4) L. Holborn u. F. Henning, Berl. Ber. 1905. S. 311—317.

5) W. Nernst u. H. v. Wartenberg, Verh. D. Phys. Ges. 8. S. 48—58. 1906.

einem Iridiumofen mit dem Wannerpyrometer in dem Augenblick maßen, in welchem ein von der anderen Seite gegenführter, zwischen Iridiumstäbe geschmolzener Palladiumdraht durchschmolz, endlich von Waidner und Burgess¹⁾, die unter anderem einen Iridiumofen und ein Holborn-Kurlbaum-Pyrometer benutzten.

Bei diesen optischen Bestimmungen wurde entweder die oberhalb des Goldschmelzpunktes extrapolierte thermoelektrische Skala zugrunde gelegt, an welche das benutzte Pyrometer angeschlossen war oder die strahlungstheoretische Skala, die mit einem bestimmten Wert der Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes erhalten wird.

Holborn und Valentiner²⁾ haben umgekehrt durch optische Messungen die Exponentialkonstante des Planckschen Gesetzes ermittelt und dabei außer der gasthermometrischen Bestimmung des Palladiumschmelzpunktes auch eine Messung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt vorgenommen. Sie benutzten dabei einen schwarzen Körper aus weißer Magnesia, durch dessen mit einem Lummer-Brodhunschen Spektralphotometer anvisierte Querwand 2 Platinrähte mit zwischengeschmolzenem Palladiumdraht gezogen waren, so daß der schmelzende Draht auf der anvisierten Seite lag.

Trotz des hier nach schon vorliegenden Beobachtungsmaterials schien eine möglichst genaue neue Bestimmung der relativen Helligkeit der Hohlraumstrahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt wünschenswert und zwar aus folgenden Gründen:

Erstens wurde von uns an 2 verschiedenen als chemisch rein bezogenen Palladiumsorten ein Unterschied von fast 10° im Schmelzpunkt beobachtet und es erscheint nicht ausgeschlossen, daß unter Umständen auch noch größere Differenzen möglich sind. Es können deshalb nur solche Messungen miteinander verglichen werden, die an Material von nachweislich gleichem Schmelzpunkt angestellt wurden. Das von uns benutzte Material stimmt im Schmelzpunkt genau überein mit dem von Day und Sosman bei ihren gasthermometrischen

1) C. W. Waidner u. G. K. Burgess, Bull. Bur. of Standards 3, S. 163—208, 1907.

2) L. Holborn u. S. Valentiner, a. a. O.

Messungen verwendeten, von dem die Reichsanstalt durch das Entgegenkommen des Hrn. Day eine Probe erhielt.

Zweitens wurden in der Reichsanstalt Neubestimmungen der Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Gesetzes vorgenommen¹⁾, die die Temperaturskala strahlungstheoretisch unabhängig vom Gasthermometer festlegen. Es war wichtig mit möglichster Genauigkeit festzustellen, ob die durch diese Neubestimmung gegebene, dem Wien-Planckschen Gesetze entsprechende Temperaturskala beim Palladiumschmelzpunkt mit der gasthermometrischen Skala nach Day und Sosman übereinstimmt.

Zu unseren Bestimmungen der relativen Helligkeit bei den beiden Schmelzpunkten benutzten wir zwei verschiedene Methoden: Bei der ersten wurde ein Hohlraumstrahler nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip verwendet, dessen Unterteilung jedoch nach dem Vorgange von Brodhun, Rothe und Hoffmann durch herausnehmbare Trommeleinsätze erfolgte, so daß der hinterste Hohlraumkörper, dessen strahlende Öffnung bei der optischen Beobachtung anvisiert wurde, herausgenommen, mit verschiedenen größeren Öffnungen versehen und sowohl in geschwärztem wie in ungeschwärztem Zustande benutzt werden konnte. Durch die strahlende Öffnung wurde vor der optischen Beobachtung ein Le Chateliersches Thermoelement mit zwischengeschmolzenem Schmelzdraht eingeführt, und der Moment des Schmelzens mit einem zweiten, von hinten eingeführten Le Chatelierschen Thermoelement beobachtet. Bei der zweiten Methode wurde ein Hohlraumkörper mit kleiner strahlender Öffnung und einem sich konisch erweiternden Ansatz in einem mit dem Schmelzmetall gefüllten Tiegel eingetaucht, der sich in einem elektrisch geheizten Platinfoliofen befand. Der Schmelzpunkt des Metalls wurde mit einem dicht neben den Hohlraumkörper eingetauchten Le Chatelierschen Thermoelement gemessen. Da die thermische Trägheit des Metalls am Schmelzpunkt wegen der Schmelzwärme sehr groß ist, gelingt es leicht, das Metall durch Einregulieren des Heizstromes lange Zeit im Zustand des Erstarrens oder Schmelzens zu erhalten. Während dieser Zeit wurden die optischen Beobachtungen vorgenommen.

1) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. 48. S. 410—432.
1915.

Die zweite Methode dürfte der ersteren bedeutend überlegen sein, da bei derselben eine viel größere Gewähr dafür vorhanden ist, daß sich die ganze Wandung des Hohlraumkörpers auf konstanter Temperatur befindet. Trotzdem mag auch auf die nach der ersten Methode angestellten Beobachtungen eingegangen werden, zumal dabei verschiedene neuartige Anordnungen benutzt wurden. Die nach beiden Methoden gefundenen mittleren Werte sind übrigens in so guter Übereinstimmung, daß man berechtigt ist, den nach der ersten Methode bestimmten Wert als im wesentlichen bestätigt durch den nach der zweiten vollkommeneren Methode bestimmten anzusehen.

§ 1. Die photometrische Einrichtung.¹⁾

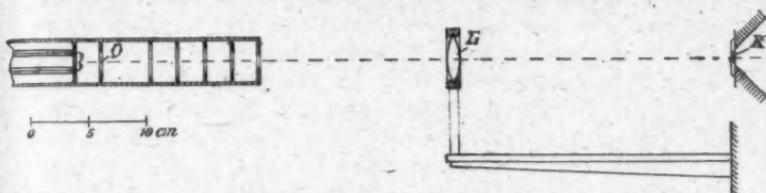
Zu den optischen Messungen wurde bei beiden Methoden ein König-Martenssches Spektralphotometer benutzt. Zur Kontrolle wurden einige Messungen mit dem Lummer-Brodhunschen Spektralphotometer angestellt, die in § 5 unter 1. aufgeführt sind.

Der 4 mm lange Okularspalt des König-Martensschen Photometers wurde auf 1,1 mm verkürzt, da sich zeigte, daß bei 4 mm langem Spalt bei geringen seitlichen Verschiebungen des Auges Schwankungen in der relativen Helligkeit der beiden durch eine vertikale Linie getrennten Gesichtsfeldhälften auftraten.

Der Kollimatorspalt wurde 0,2 mm breit, der Okularspalt 0,3 mm breit gewählt, so daß eine Einstellung des Kollimatorspalts auf die Mitte des schwach erhellten Okularspaltes möglich war, ohne die Spalte zu verstellen. Wie durch eine besondere, rechnerische Untersuchung nachgewiesen wurde, weicht bei diesen Spaltbreiten das beobachtete Verhältnis der Helligkeiten bei den beiden Schmelzpunkten nur um eine zu vernachlässigende Größe von dem auf unendlich schmale Spalte reduzierten Verhältnis ab. Die eine Hälfte des Kollimatorspaltes wurde unter Vermittlung einer Linse und des am Photometer befindlichen, total reflektierenden Prismas von einer Mattscheibe beleuchtet, die durch eine mit konstantem

1) Bei den optischen Messungen wurde uns in ausgedehntem Maße der Rat von Hrn. Geh. Reg.-Rat Brodhun zu Teil, dem wir hierfür auch an dieser Stelle unseren Dank aussprechen.

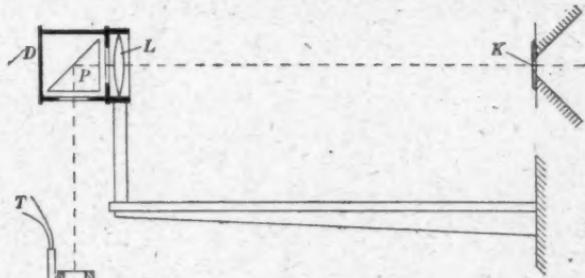
Strom belastete kleine Metallfadenlampe erhellte war. Lampe, Mattscheibe und Linse waren fest am Photometer montiert.



Strahler *B* vor Königsgem Photometer.

Fig. 1.

Die andere Kollimatorspalthälfte wurde von dem zu untersuchenden Hohlraumstrahler beleuchtet, und zwar wurde die Öffnung *O* des Hohlraumstrahlers durch eine Linse *L*, die fest am Photometer montiert war, auf dem Spalt *K* des Photometers abgebildet (Fig. 1). Bei den Beobachtungen an den



Hohlraumstrahler vor Königsgem Photometer.

Fig. 2.



Hohlraumkörpern *H* in schmelzendem Metall *M* (Fig. 2) war vor der Linse *L* noch ein total reflektierendes Prisma *P* angebracht, durch welches die vertikal aus dem Hohlraumkörper austretenden Strahlen horizontal gerichtet wurden. Der das Prisma enthaltende Kopf *D* war um die nach dem Kollimator-

spalt K gerichtete Achse drehbar, so daß durch Drehung des Kopfes um 90° in unmittelbarer Folge Beobachtungen an dem Hohlraumkörper im Tiegel und an einem schwarzen Körper nach Lummer-Kurlbaumschen Prinzip angestellt werden konnten.

Der drehbare Kopf D wurde so justiert, daß seine Drehungsachse mit der optischen Achse der einen Photometerhälfte zusammenfiel und das Prisma P so ausgerichtet, daß die Reflexion an ihm unter 45° erfolgte. Die Richtigkeit der Justierung wurde mehrmals im Laufe der Untersuchung kontrolliert.

Beim Königschen Photometer ist, wenn k eine Konstante bedeutet, die Helligkeit J der photometrischen Lichtquelle in einem eng begrenzten Wellenlängenbereich mit dem Einstellwinkel a verknüpft durch die Beziehung

$$J = k \cdot \operatorname{tg}^2 a.$$

Für das Helligkeitsverhältnis H zweier Lichtquellen oder einer Lichtquelle bei zwei verschiedenen Temperaturen gilt also

$$(1) \quad H = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}.$$

Ob diese Beziehung streng erfüllt war, ist im Laufe der Beobachtungen wiederholt unmittelbar nachgeprüft worden und zwar in der Weise, daß die Helligkeit einer gegebenen Lichtquelle durch Zwischenschaltung eines rotierenden Sektors um einen genau meßbaren Betrag geschwächt und die Einstellung mit und ohne Schwächung vorgenommen wurde. Die Messungen ergaben stets eine Übereinstimmung mit der Berechnung, die weit innerhalb der Einstelfehler lag.

Trotzdem wurde angestrebt, die Winkel bei den beiden zu vergleichenden Helligkeiten nicht allzu verschieden ausfallen zu lassen, weil man so in beiden Fällen dem Gebiete größter Meßgenauigkeit des Photometers nahe bleiben kann. Es wurde deshalb beim Palladiumschmelzpunkt zwischen schwarzen Körper und Photometer ein rotierender Sektor geschaltet, dessen Öffnung $8,6^\circ$ betrug, so daß das eintretende Licht auf $\frac{1}{100}$ seines Betrages geschwächt wurde. Diese Schwächung wurde von Hrn. Brodhun mehrfach nachgeprüft und auf etwa $\frac{2}{1000}$ ihres Wertes richtig gefunden. Bei Einschaltung des Sektors bei der Messung von J_2 gilt also, wenn α_2 der zugehörige Einstellwinkel ist, für das Helligkeitsverhältnis der Wert

$$(2) \quad H = 100 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1}.$$

§ 2. Die benutzten Hohlraumstrahler nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip und die Eichung derselben.

Die beiden Arten von Hohlraumstrahlern nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip, die verwendet wurden, sind in Fig. 3 und 4 dargestellt.

Der erstere Typ (Fig. 3) ist der ursprüngliche Lummer-Kurlbaumsche. Es wurden zwei Exemplare desselben benutzt, von denen der eine von Hrn. Lummer selbst übernommen und noch von diesem geschwärzt war, während der andere neu hergestellt und mit einer Schwärze aus gleichen

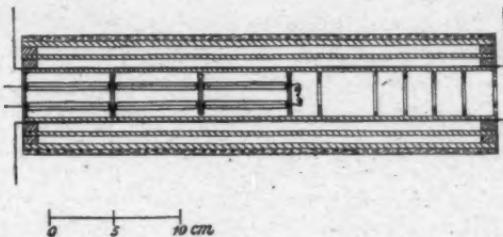


Fig. 3. Strahler B.

Teilen Eisen- und Chromoxyd unter Zusatz von etwas Marquardtscher Masse als Bindemittel geschwärzt wurde. Das erstere Exemplar, der Strahler B, wurde seit Jahren und bis auf einen Ausnahmefall auch während der vorliegenden Untersuchung nur bis 1100° benutzt, während das zweite neuere Exemplar, der Strahler E, zur Erledigung von Prüfungsanträgen wiederholt bis 1400° verwendet wurde.

Für die vorliegende Untersuchung von ausschlaggebender Bedeutung ist die Frage, mit welcher Sicherheit die Temperatur der anvisierten Rückwand der innersten Kammer des Strahlers als mit der des Schmelzpunktes der verwandten Metalle (Gold und Palladium) übereinstimmend angesehen werden kann. Da die Einstellung dieser Temperatur mit dem im Körper montierten Thermoelement, dem sogenannten „Haltelement“ erfolgte, galt es also, dessen Thermokraft unter diesen Umständen einwandfrei zu ermitteln. Von den durch Inhomogenität der Schenkel hervorgerufenen Fehlern des Haltelementes befreit man sich auf einfache Weise dadurch, daß man das Element nicht für sich, sondern im schwarzen

Körper selbst in der Lage eicht, in der es dauernd gebraucht wird. Dazu dienten zwei Methoden: Bei der ersten wurde der Schmelzpunkt des Metalls an einem zwischen die Schenkel eines von vorn eingeführten Thermoelementes geschmolzenen Drahtes beobachtet und gleichzeitig die Thermokraft des Halteelementes bestimmt. Dabei war das Schmelzdrahtelement in ein dünnwandiges Rohr aus Marquardtscher Masse montiert (Fig. 4). Der Schmelzdraht war so zwischen die beiden



Fig. 4.

Schenkel geschmolzen, daß die beiden Schenkelspitzen, die etwas neben der Lötstelle des Halteelementes gegen die Kammerrückwand gedrückt wurden, frei blieben. Bei der zweiten wurde durch „Abtasten“ die Thermokraft des Halteelementes mit der eines von vorn eingeführten, nach der Schmelzdrahtmethode geeichten Thermoelementes verglichen, wobei die Lötstellen beider Elemente zur Berührung gebracht wurden. Um zu verhüten, daß die Lötstelle des Halteelementes infolge Wärmeleitung längs der Schenkel eine von der Temperatur der Kammer stärker abweichende Temperatur annimmt, ist es wichtig, daß die Schenkel zu beiden Seiten der Lötstelle innerhalb der Kammer zu je einer „Locke“ von etwa 5 Windungen gewunden sind. Daß dadurch die Temperaturlgleichheit mit der Kammerrückwand im wesentlichen gesichert ist, geht nicht nur daraus hervor, daß die Lötstelle des Thermoelements bei Temperaturkonstanz im glühenden Hohlraum fast vollkommen verschwindet, sondern auch aus der Übereinstimmung zwischen der Eichung nach der Tast- und Schmelzmethode. Ein geringer Unterschied zwischen der Temperatur der Lötstelle des Halteelementes und der strahlenden Rückwand würde übrigens bei dieser Eichmethode deshalb herausfallen, weil das Halteelement lediglich dazu dient, nach dem Herausziehen des Schmelzelementes wieder genau die gleiche Temperatur der Rückwand einstellen zu können, die beim Schmelzpunkt vorhanden war.

Die Thermokräfte des Halteelementes und des Durchschmelzelementes wurden an je einem Kompensationsapparat mit Spiegelgalvanometer als Nullinstrument bis auf etwa

0,1 Mikrovolt genau abgelesen. Es ist dann beim Goldschmelzpunkt möglich, den Schmelzprozeß genau zu beobachten: Wenn der Temperaturanstieg mit dem Halteelement gleichmäßig auf etwa 5 Mikrovolt pro halbe Minute einreguliert ist, zeigt beim Eintritt des Schmelzens das Durchschmelzelement plötzlich konstante Thermokraft, und erst nachdem die Anzeige des Halteelements weiter um etwa 1°C gestiegen ist, erfolgt das Durchschmelzen des Schmelzdrahtes; kurz vorher beginnt die Thermokraft des Durchschmelzelementes plötzlich stark zu wachsen.

In Tab. 1 sind einige der im Laufe der ganzen Untersuchung beim Goldschmelzpunkt für das Haltelement von Körper *B* gefundenen Thermokräfte eingetragen.

Tabelle 1.

Thermokräfte beim Goldschmelzpunkt für Körper *B*.

Datum	Thermokraft in 10^{-6} Volt	Datum	Thermokraft in 10^{-6} Volt
4. 11. 1910	10306	31. 7. 1912	10305
31. 12. 1910	10303	11. 9. 1912	10303
16. 1. 1911	10306	6. 12. 1912	10303
20. 4. 1911	10304	11. 12. 1912	10298
30. 10. 1911	10298	28. 12. 1912	10295
21. 2. 1912	10302		

Die in der Tabelle aufgeführten Werte sind in der Regel Mittelwerte aus 2 Einzelbeobachtungen, deren Resultate sich stets um weniger als 10 Mikrovolt unterschieden. Aus der Tabelle geht hervor, daß das Haltelement des Körpers *B* nur eine ganz geringe Abnahme der Thermokraft erlitten hat. Der dem Strahler *B* analog gebaute Strahler *E* wurde benutzt, um eine Kontrolle für die optische Temperaturanzeige von *B* zu haben. Beide Strahler stimmten am Goldschmelzpunkt innerhalb 1° überein.

Der zweite neue, zusammensetzbare Typ des Lummer-Kurlbaumschen Strahlers (Strahler *F*, Fig. 5) war früher (im Jahre 1907/08) von Brodhun, Rothe und Hoffmann eingehend untersucht worden. Dabei hatte sich folgendes ergeben: Bei genügend kleiner Öffnung im Deckel der hintersten strahlenden Kammer (Loch von 3 mm Durchmesser oder

Spalt) ist die Helligkeit der austretenden Strahlung bei gleicher, thermoelektrisch gemessener Temperatur unabhängig davon, ob die strahlende Kammer geschwärzt oder ungeschwärzt ist. Bei größerer Öffnung ist die Helligkeit des weißen Strahlers größer als die Helligkeit des mit dem Thermoelement auf gleiche Temperatur eingestellten geschwärzten Strahlers. Dies im Gegensatz zu der gewöhnlichen Anschauung stehende Resultat ist offenbar dadurch hervorgerufen, daß die Seitenwände der strahlenden Trommel zufolge der Beheizung höher temperiert

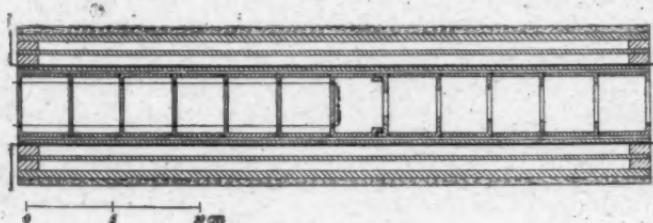


Fig. 5. Strahler F.

sind als die Rückwand der Trommel, deren Temperatur thermoelektrisch eingestellt wird. Die heißen von den Seitenwänden kommenden Strahlen werden von der weißen Rückwand stärker reflektiert als von der schwarzen, so daß die weiße Rückwand heller erscheint als die schwarze. Dasselbe Resultat wie mit dem zusammensetzbaren Strahler wurde auch mit geschwärzten und ungeschwärzten Strahlern gewöhnlicher Konstruktion erhalten. Besonders starke Effekte erhält man, wenn die Seitenwände geschwärzt sind und die Trommellrückwand weiß gelassen ist oder wenn von der Rückwand an einzelnen Stellen die Schwarze abgeplattet ist. Der Effekt ist in der Regel bei niederen Temperaturen größer als bei höheren Temperaturen. Der zusammensetzbare Strahler ist zum Gebrauch in Temperaturen oberhalb 1400°C geeigneter als der Strahler Lummer-Kurlbaumscher Konstruktion, da beim ersten das durch Platinfolie beheizte Rohr, in welches die Trommeln eingeschoben werden, viel weniger leicht bricht als das Rohr des Lummer-Kurlbaumschen Hohlsaumstrahlers, das vor dem Brennen aus mehreren Stücken zusammengebacken ist. Ferner kann in dem zusammensetzbaren Strahler die strahlende Trommel nötigenfalls ungeschwärzt bleiben. Es zeigte sich

allerdings, daß die Schwärze der oben angegebenen Zusammensetzung bis 1600° C noch gut brauchbar ist. Um die Benutzung des zusammensetzbaren Strahlers bis zum Palladiumschmelzpunkt auf längere Zeit hin zu ermöglichen, wurde die Stärke der zur Heizung verwendeten Platinfolie von 0,01 mm auf 0,03—0,04 mm erhöht und der Zwischenraum zwischen der Platinfolie und dem nächsten, etwa 5 mm entfernten konzentrischen Rohr mit feingekörnter gebrannter Magnesia gefüllt. Die letztere Maßregel verhindert ein stärkeres Durchbiegen des beheizten Rohres aus Marquardtscher Masse. Bezuglich der Wirksamkeit der verstärkten Platinfolie mag folgendes bemerkt werden: An und für sich sollte die dünne Platinfolie bei sonst gleichen Umständen, insbesondere bei gleichem Energieverbrauch des Ofens, keine höhere Temperatur als die dicke Folie annehmen, wie einfache Überlegungen zeigen. Die praktische Erfahrung lehrt aber, daß eine dünne Folie beim Erhitzen des Ofens auf den Palladiumschmelzpunkt trotz größter Vorsicht alsbald durchbrennt, während der Ofen mit dicker Folie eine große Zahl von Erhitzungen auf den Palladiumschmelzpunkt und darüber hinaus aushält. Es ist dies vermutlich darauf zurückzuführen, daß in der dünnen Folie wegen der vorhandenen Ungleichmäßigkeit ihrer Dicke größere Temperaturunterschiede vorkommen als in der dickeren Folie.

Das Halteelement des Strahlers *F* wurde entweder, wie in Fig. 5 dargestellt ist, durch die anivisierte Rückwand hindurchgezogen, so daß sich Lötstelle und Loeke im strahlenden Hohlraum befanden oder (Fig. 6) das Element wurde in einer kurzen



Fig. 6.

Trommel hinter der strahlenden Kammer so angeordnet, daß die Lötstelle die strahlende Rückwand von hinten berührte. In letzterem Falle wurde durch besondere Versuche festgestellt, daß der Unterschied zwischen der Anzeige des Haltelementes und der des Durchschmelzelementes von dem Temperaturanstieg genügend unabhängig war. Hierbei wurde so verfahren, daß das Durchschmelzelement ohne Zwischenfügen

eines Golddrahtes oder Palladiumdrahtes zusammengeschmolzen und genau so wie bei den Schmelzpunktbestimmungen eingeführt wurde; es konnten dann die Unterschiede zwischen den Anzeigen von Halte- und Durchschmelzelement an den Schmelzpunkten bei steigender und bei fallender Temperatur gemessen werden. Sowohl beim Palladium als beim Goldschmelzpunkt waren die entstehenden Fehler, wie zwei Versuchsreihen ergaben, zu vernachlässigen.

Um den Temperaturabfall längs der strahlenden Kammer möglichst gering zu machen, wurden alle Trommeln zusammen vor den Schmelzpunktsbestimmungen in dem Heizrohr so verschoben, daß Rückwand und Deckel der strahlenden Kammer, gleich hell erschienen und das Temperaturmaximum demnach etwa in der Mitte der strahlenden Kammer lag. Gegen Ende der Untersuchung wurde das Abgleichen der Temperatur statt durch Verschieben der Trommeln in der Weise bewirkt, daß auf den Strahler eine verschiebbare Hülle aus Asbestpappe gestreift wurde, die etwa $\frac{1}{3}$ so lang wie der ganze Strahler war. Durch Verschieben der Hülle ist es möglich, die heißeste Stelle des Ofens in gewissen Grenzen zu verschieben. Dies Verfahren ist auch anwendbar bei gewöhnlichen Strahlern nach Lummer-Kurlbaum, bei denen die strahlende Rückwand nicht verschiebbar ist. Um den Temperaturabfall noch geringer zu machen, wurde auch noch folgender allerdings etwas umständlicher Weg eingeschlagen: Die Heizfolie wurde nicht der ganzen

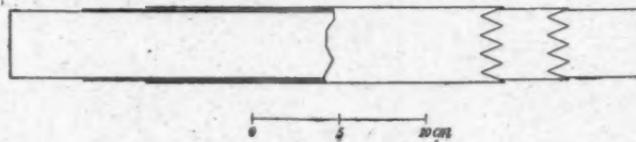


Fig. 7. Strahler *F*, Heizfolie.

Länge nach gleich dick gewählt, sondern aus mehreren Schichten von immer geringerer Länge zusammengesetzt, so daß die Folie nach den beiden Enden zu dünner wurde. Die einzelnen Schichten waren an den Enden ausgezackt (Fig. 7), um plötzliche Temperatursprünge zu vermeiden.

Gegen die Schmelzpunktsbeobachtungen nach der oben angegebenen Methode kann man folgende Bedenken erheben: Der Schmelzdraht liegt zwar bei der Schmelzpunktsbestimmung

in unmittelbarer Nähe der später bei der optischen Beobachtung anvisierten Rückwand. Wenn man aber das Halteelement nach dem Herausziehen des Durchschmelzelements auf den beim Schmelzpunkt gefundenen Wert einstellt, so kann es fraglich erscheinen, ob dann die anvisierte Rückwand dieselbe Temperatur wie bei der Schmelzpunktsbestimmung hat, da nach dem Herausziehen des Durchschmelzelements zwischen der anvisierten Stelle der Rückwand und der Lötstelle des Halteelements andere Temperaturunterschiede vorhanden sein können als vorher. Gegen die Stichhaltigkeit dieser Einwände spricht folgendes: Zwei neue in ihren Anzeigen übereinstimmende Elemente zeigen, wenn das eine als Halteelement, das andere als vorderes Schmelzdrahtelement benutzt wird, genau gleiche Temperatur an. Bei der Schmelzpunktsbestimmung hat also die Rückwand dieselbe Temperatur wie die Lötstelle des Halteelements und dies wird daher auch nach dem Herausziehen des Schmelzdrahtelements der Fall sein, da die Helligkeit der Rückwand nach früher Gesagtem unabhängig von der Größe der strahlenden Öffnung ist. Erwähnt werden mag noch folgende Erweiterung der Schmelzpunktsbestimmung nach der Drahtmethode:

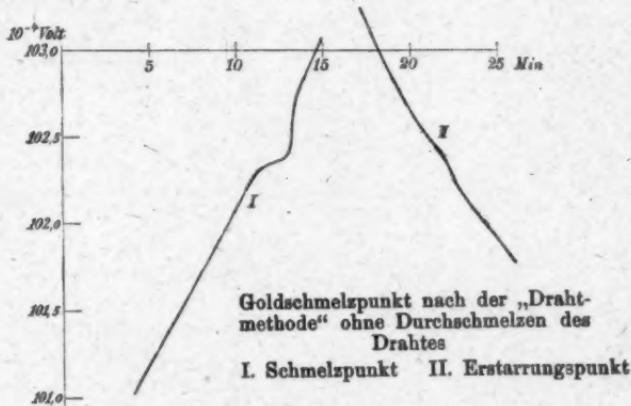


Fig. 8.

Wird der Schmelzdraht absichtlich kurz gewählt, so tritt kein Durchschmelzen desselben ein, da die Drähte durch den geschmolzenen Metalltropfen in leitender Verbindung bleiben.

Man kann daher Schmelzpunkt und Erstarrungspunkt wie bei der Tiegelmethode beobachten, so daß man sofort eine Eichung des Halteelements erhält, die als Mittel des Resultats bei steigender und fallender Temperatur unabhängig von dem Temperaturgang ist. Eine der so aufgenommenen Schmelz- und Erstarrungskurven an Schmelzdrähten ist in Fig. 8 wiedergegeben. Beim Palladiumschmelzpunkt versagt indessen die Methode, da Palladium in Luft keinen scharfen Erstarrungspunkt besitzt. Übrigens ist auch der Schmelzpunkt des Palladiums nach der Drahtmethode viel weniger scharf ausgeprägt als der des Goldes.

§ 3. Der Hohlraumstrahler im schmelzenden Metall und die zugehörigen Schmelzpunktbestimmungen.

Die gesamte Anordnung ist aus Fig. 9 zu ersehen. Es ist *H* der Hohlraumstrahler, *M* das Metall, in welches derselbe eingetaucht ist, *T* der Schmelztiegel, *Th* das Thermoelement.

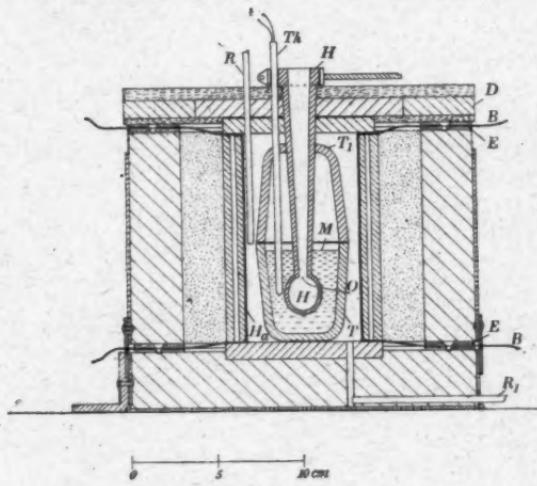


Fig. 9. Schmelzofen.

Zum Schutz der Heizfolie des Ofens gegen ausfließendes Metall bei etwaigem Springen des Schmelztiegels ist dieser im allgemeinen noch in einen zweiten dünnwandigen Tiegel gesetzt worden. An dem Schmelzofen bezeichnet *H₁* die Heizfolie, *E* die Elektrodenringe aus Silber, die durch einen Kranz von

Platinbändern mit der Folie H_a und durch je 2 Silberbänder B mit den außenliegenden (nicht gezeichneten) Kupferhalbringen verbunden sind, an welche die Zuführungskabel angeschlossen werden. Der Schmelztiegel ist durch einen umgekehrten Tiegel T_1 mit durchbohrtem Boden zugedeckt und der Schmelzofen durch zwei übereinanderliegende durchbohrte Deckel geschlossen. Durch den Boden des Schmelzofens führt ein Rohr R_1 , durch welches Stickstoff in den Ofen eingeleitet werden konnte. Ein zweites Rohr R ist durch die Deckel des Schmelzofens geführt, so daß der durch R_1 zugeführte Stickstoff durch R austreten kann. Die optische Einrichtung, durch welche die Öffnung O des Hohlraumstrahlers auf dem Spalt des Photometers abgebildet wird, ist aus Fig. 2 zu ersehen.

Die Tiegel wurden aus feuchter Marquardtscher Masse auf einer Drehscheibe gedreht, nach dem Trocknen in dem Schmelzofen langsam gebrannt und bis über $1550^\circ C$ erhitzt. Sie hatten eine Wandstärke von etwa 5 mm. Tiegel mit schwächeren Wänden bekamen bei den Schmelzversuchen mit Palladium Risse. Die Tiegel wurden vom Palladium nicht angegriffen und vertragen mehrfaches Schmelzen und Erstarren des Palladiums gut.

Magnesiatiegel der Kgl. Porzellanmanufaktur in Berlin erwiesen sich als unbrauchbar, da das Palladium sich mit der Tiegelmasse zu einer braunen Masse verband. Tiegel aus Zirkonoxyd zeigten ein ähnliches Verhalten. Auch für den Goldschmelzpunkt wurden Tiegel aus Marquardtscher Masse benutzt.

Die Hohlraumstrahler wurden ebenfalls im Laboratorium aus Marquardtscher Masse hergestellt und zwar in folgender Weise: Aus einem zylindrischen Stück Marquardtscher Masse wurde nach dem Trocknen desselben durch Drehen und Bohren

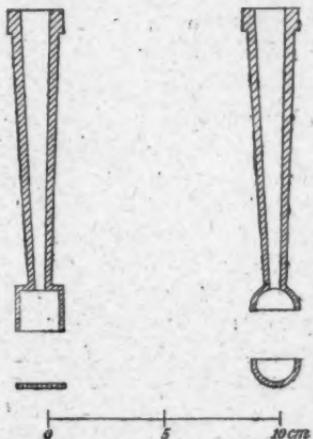


Fig. 10. Hohlraumstrahler.

zunächst Stücke von den in Fig. 10 abgebildeten Formen hergestellt und die halbkugelförmigen oder flachen Deckel nach kräftigem Befeuchten der zu verbindenden Stellen aufgeklebt. Die Körper wurden sodann nach dem Trocknen in einem Röhrenofen bei etwa 1100°C gebrannt und der untere Teil des Hohlraumstrahlers im Schmelzofen noch auf über 1550°C erhitzt. Die so hergestellten Hohlraumstrahler wurden durch das Palladium selbst gar nicht beschädigt. Doch trat nach längerem Gebrauch meist eine Krümmung des außerhalb des Metalls befindlichen konischen Rohransatzes ein, so daß die Hohlraumkörper mehrmals erneuert werden mußten. Für die Kupferschmelzpunkte wurde nicht der in Fig. 9 dargestellte Schmelzofen verwendet, sondern ein Ofen älterer Konstruktion, bei dem die Heizung nicht durch eine Platinfolie, sondern durch ein Platinband erfolgte, das außen auf einen Hohlzylinder Marquardtscher Masse gewickelt und mit Marquardtscher Masse angeheftet ist. Dieser Ofen ist aber nur bis zum Kupferschmelzpunkt brauchbar. Als Schmelztiegel für das Kupfer dienten Graphittiegel; ebenso wurde der Deckel des Tiegels beim Kupferschmelzpunkt aus einem Graphittiegel hergestellt. Um eine Korrosion des Platins durch die Kohlenoxyddämpfe zu vermeiden, wurde um den Graphittiegel ein Hohlzylinder aus Eisenblech gestellt.

Die Schmelzpunktsbestimmungen im Tiegel geschahen in folgender Weise: Nachdem der Tiegel mit Metall beschickt, in den Ofen eingesetzt und bis zum Schmelzen des Metalls erhitzt war, wurde der Hohlraumstrahler mit seitlich daneben in einem unten geschlossenen Rohr aus Marquardtscher Masse in unverrückbarer Stellung angebrachtem Thermoelement (Fig. 9) in das flüssige Metall eingesenkt. Sodann wurde durch geeignete Regelung des Heizraumes wiederholt der Schmelz- und Erstarrungspunkt ein wenig überschritten, während die Anzeige des Thermoelements am Kompensationsapparat in halbminutlichem Abstand gemessen wurde. Der Temperaturgang wurde so bemessen, daß er außerhalb des Schmelzprozesses selbst etwa 1° pro Minute betrug. Das Palladium, bei dem auch der Schmelzpunkt weniger scharf als bei Gold und Kupfer ist, hat in Luft keinen brauchbaren Erstarrungspunkt, da beim Erstarren Spratzen durch Abgabe von Gas auftritt. Deshalb wurde die oben bei Beschreibung des Schmelzofens erwähnte

Stickstoffspülung eingeführt, bei deren Anwendung der Erstarrungspunkt beobachtbar wird. Es trat aber auch dann noch etwa 7° unterhalb des Erstarrungspunktes eine neue Unstetigkeit auf, bei der die Temperatur unter Spratzen des Tiegelinhaltens ähnlich wie beim Erstarrungspunkt noch einmal etwas empor sprang.¹⁾ In der Regel lag beim Palladium der

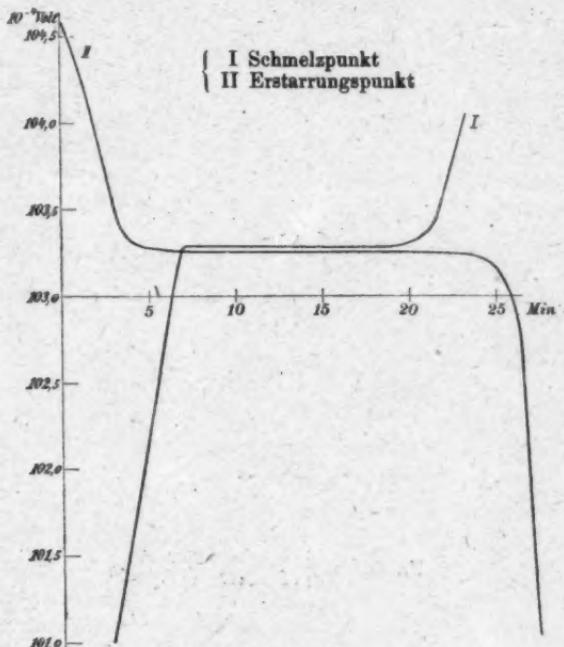


Fig. 11.

aus der Thermokraft bei dem geringsten Temperaturgang ermittelte Erstarrungspunkt etwas (im allgemeinen weniger als 1°) tiefer als der entsprechend bestimmte Schmelzpunkt.

In Figg. 11, 12 und 13 ist je eine Schmelz- und Erstarrungskurve für Gold, Kupfer und Palladium wiedergegeben.

Nachdem Schmelz- und Erstarrungspunkt durch mehrmaliges Auf- und Abwärtsgehen ermittelt war, wurde der

1) Vgl. S. 231.

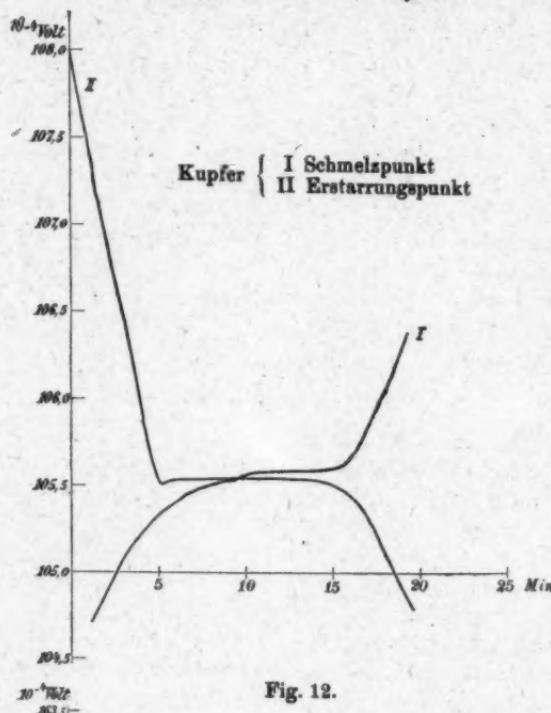


Fig. 12.

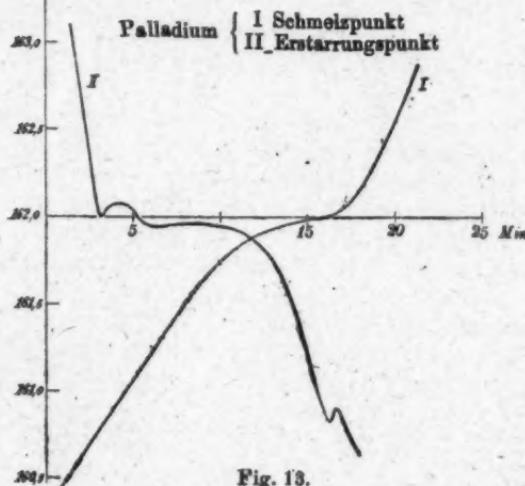


Fig. 13.

Strom so reguliert, daß die Temperatur bei dem Mittelwert konstant einstahd. Daß dann der Tiegelinhalt teilweise geschmolzen, teilweise erstarrt war, ging daraus hervor, daß eine Änderung des Heizstromes, die sonst genügt hätte, die Temperatur sofort merklich zu verschieben, fast ganz ohne Einfluß blieb. Von einem besonderen Beobachter, der Thermoelement und Heizstrom überwachte, konnte so ohne Mühe das Metall während der ganzen Dauer der optischen Beobachtungen beim Schmelzpunkt erhalten werden. Vor dem Erstarrenlassen des Tiegelinhals nach Abschluß jeder Versuchsreihe wurde Hohlraumstrahler und Thermoelement aus dem geschmolzenen Metall gehoben.

§ 4. Die verwendeten Metalle.

1. Gold. Für die Schmelzpunktsbeobachtungen wurden zunächst verschiedene Drahtsorten verwendet, die als „chemisch rein“ bezogen schon seit längerer Zeit zu solchen Zwecken dienten. Außerdem wurde 1909 von W. C. Heraeus ein „chemisch reiner“ Golddraht bezogen und mit jenen älteren Sorten verglichen. Alle diese Sorten zeigen sowohl untereinander wie auch mit einer vom Hrn. Präsidenten Warburg zur Verfügung gestellten Probe des bei seinen Messungen benutzten Drahtes einen bis auf weniger als einen Grad übereinstimmenden Schmelzpunkt. Für die Tiegelschmelzversuche wurde sodann von der Reichsbank etwa 1 kg Feingold zur Verfügung gestellt. Dieses Gold wurde von Hrn. Mylius nach der von ihm angegebenen Äthermethode¹⁾ gereinigt. Von dem so gewonnenen sehr reinen Gold, dessen Verunreinigungen nicht über $\frac{1}{1000}$ Proz. betragen, wurden kleine Proben eingeschmolzen und deren Schmelzpunkt nach der Drahtmethode mit dem der zuvor untersuchten Drähte verglichen. Endlich wurden von dem zu den Schmelzpunktsbeobachtungen im Tiegel verwendeten Metall kleine Proben abgeschnitten und in derselben Weise untersucht. In allen Fällen konnte ein Unterschied zwischen den Schmelzpunkten nicht beobachtet werden.

Das von W. C. Heraeus käuflich als „chemisch rein“ zu beziehende Gold ist also hinreichend rein, um Schmelzpunkte zu ergeben, die auch mit dem des reinsten darstellbaren Goldes übereinstimmen.

1) F. Mylius, Zeitschr. f. anorg. Chem. 70, S. 203—231. 1911.

2. Palladium. Weniger günstig als beim Gold verhält es sich mit der Reinheit des käuflichen „chemisch reinen“ Palladiums. Verschiedene von W. C. Heraeus bezogene Palladiumdrähte zeigen beim Schmelzpunkt Unterschiede bis zu etwa 9,5°. Nach Ansicht der Firma ist dies darauf zurückzuführen, daß von ihr zwar im allgemeinen nur solches Palladium als „chemisch rein“ abgegeben wird, das nach mehrmaligen Umlösen von Palladosaminchlorid durch Fällen mit Quecksilbercyanid erhalten wird, gelegentlich aber auch solches, das nur mehrmals als Palladosaminchlorid umgelöst war. Tatsächlich scheinen auch verschiedene nach der ersten Methode gereinigte Metallproben sehr gut übereinstimmende Schmelzpunktwerte zu ergeben, während bei dem nach der zweiten Methode gereinigten Metall, wohl wegen eines geringen Gehaltes an Platin, der Schmelzpunkt zu hoch liegt. Tab. 2 enthält für eine Reihe von Metallproben die Schmelzpunkte ausgedrückt in Mikrovolt eines Platin-Platinrhodiumelements, wie sie beim Messen nach der Drahtmethode gewonnen wurden.

Tabelle 2.
Thermoelektrische Bestimmung von Schmelzpunkten verschiedener Palladiumsorten.

Palladium	Thermokraft eines Pt-Pt-Rh-Elementes beim Schmelzpunkt	Differenz gegen Pd Sept. 1910 in 10^{-6} Volt	in °C
Sept. 1910 Draht	$16200 \cdot 10^{-6}$ Volt	—	—
Dez. 1910 „	16331	131	9,5
I a „	16329	129	9,5
I b „	16247	47	3,5
Day Stäbchen	16201	1	0
Juni 1911 Draht	16205	5	0
Dez. 1911 „	16204	4	0
Dez. 1911 Blech	16201	1	0

Die hierin verzeichneten Sorten vom September 1910, Juni 1911 und Dezember 1911 müssen als hinreichend untereinander übereinstimmend angesehen werden. Dasselbe gilt auch von der mit Day bezeichneten Probe. Es ist das ein Stückchen von $20 \times 4,5 \times 1,8$ mm Größe von dem von Day und Sosman zu ihren Messungen¹⁾ verwendeten Metall, das,

1) A. L. Day u. R. B. Sosman, a. a. O.

wie schon erwähnt, durch das freundliche Entgegenkommen des Hrn. Direktor Day der Reichsanstalt zur Verfügung gestellt wurde. Zu den Schmelzpunktsbeobachtungen wurden davon mit einer sorgfältig gereinigten stählernen Zange kleine Stückchen von etwa 1×1 mm Querschnitt abgekniffen und zwischen die Schenkel eines Thermoelements geschmolzen. Die in der Tabelle verzeichneten Sorten Ia und Ib sind zwei vom Hrn. Präsidenten Warburg zur Verfügung gestellten Proben, von denen die eine offenbar mit der Sorte übereinstimmt, die von Heraeus Dezember 1910 geliefert und unvollständig gereinigt war.

Um das von uns verwendete Palladium noch nach einer anderen Richtung hin zu charakterisieren, wurde seine Thermokraft bestimmt, die es bei 100° und 1000° C und beim Goldschmelzpunkt gegen einen sehr reinen Platindraht zeigt, der für ähnliche Zwecke in der Reichsanstalt aufbewahrt wird. Die Beobachtungen beim Goldschmelzpunkt erfolgten so, daß ein Stückchen Golddraht zwischen Platin- und Palladiumschenkel geschmolzen und die Thermokraft beim Durchschmelzen beobachtet wurde, während gleichzeitig die Temperatur mit einem Platin-Platinrhodiumelement verfolgt wurde. Die Beobachtung ergab beim Goldschmelzpunkt an zwei Stücken des Palladiumdrahtes vom Juni 1911 im Mittel aus mehreren Messungen

$$12491 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

$$12498 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

Wie wenig dieser geringe Unterschied für die Schmelzpunktsbeobachtungen in Betracht kommt, geht daraus hervor, daß die beiden Proben vom Draht Dezember 1910 und Juni 1911 bei etwa 1000° C folgende Thermokräfte gegen Palladium aufwiesen:

$$\text{Dez. } 1910 \quad 5570 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

$$\text{Juni } 1911 \quad 11220 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

Einer Schmelzpunktserhöhung von etwa $9,5^{\circ}$ entspricht also eine Erniedrigung der Thermokraft gegen Platin um über die Hälfte des ganzen Betrages. Die Bestimmung der Thermokraft ist demnach ein vorzügliches Kriterium der Reinheit des Palladiumdrahtes.

3. Kupfer. Für die Beobachtung des Kupferschmelzpunktes wurde reines Elektrolytkupfer von C. A. F. Kahlbaum verwendet.

§ 5. Die Messungen selbst und ihre Ergebnisse für die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold-, Kupfer- und Palladiumschmelzpunkt.

Die eigentlichen Messungen umfaßten folgende Beobachtungsreihen:

1. Die Bestimmung der relativen Helligkeit der schwarzen Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt, bei beiden Schmelzpunkten unter Verwendung eines Hohlraumstrahlers nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip.

2. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Kupferschmelzpunkt, unter Verwendung eines in das flüssige Metall tauchenden Hohlraumstrahlers beim letzteren, und eines Lummer-Kurlbaumschen Strahlers oder eines eintauchenden Hohlraumstrahlers beim ersten.

3. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt, unter Verwendung eines eintauchenden Hohlraumstrahlers beim letzteren, und eines Lummer-Kurlbaumschen Strahlers oder eines eintauchenden Hohlraumstrahlers beim ersten.

1. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt unter Verwendung eines schwarzen Körpers nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip.

Zu den Beobachtungen wurde der schwarze Körper *F* benutzt und zur Kontrolle beim Goldschmelzpunkt der schwarze Körper *B* (vgl. § 2).

Eine erste Versuchsreihe (Beobachtungen 1 bis 9 der Tab. 3) bezweckte, zunächst festzustellen, ob noch ein Einfluß der Änderung von Schwärze und Öffnung beim Lummer-Kurlbaumschen Strahler zu bemerken war. Zu dem Zwecke wurde in dem Strahler *F* der innerste Hohlraum durch Einsetzen von innen weißen oder geschwärzten Trommeln und Abschließen derselben durch Deckel mit spaltförmiger oder runder Öffnung mehrfach verändert und mit dem Königischen Photometer die Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt nur im Rot beobachtet. Zur Ergänzung dienten drei Beobachtungen mit dem Lummer-Brodhunschen Photometer im Rot und Gelb. Bei diesem wurde die Gleichheit der

Gesichtsfelder durch einen zwischen Vergleichslichtquelle und Photometer geschalteten variablen Sektor mit rotierenden Prismen hergestellt. Beim Palladiumschmelzpunkt wurde wie beim Königschen Photometer der $\frac{1}{100}$ Sektor benutzt. Das Helligkeitsverhältnis ergibt sich so unmittelbar aus den Einstellungen σ_1 und σ_2 des variablen Sektors zu

$$H = 100 \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

In einem Falle wurde ein Sektor benutzt, der eine Öffnung von 2×10^6 hatte, also eine Schwächung von $\frac{1}{18}$ hervorrief (Beobachtung 3). Aus allem ergab sich, daß die Helligkeit der austretenden Strahlung in Übereinstimmung mit den früheren in § 2 beschriebenen Versuchen unabhängig davon war, ob der innerste Hohlraum weiß oder geschwärzt war. Es konnte danach angenommen werden, daß die Strahlung schon bei dem innen weißen Hohlraum hinreichend schwarz ist, und daß dies um so mehr für eine innen geschwärzte Trommel zutrifft, wie sie bei den Hauptversuchen ausschließlich verwendet wurde.

Tabelle 3.

Vorversuche über die relative Helligkeit beim Palladium- und Goldschmelzpunkt.

Beob.	Im Rot			Schwarzer Körper <i>F</i>	Photometer Koll. Sp. Ok. Sp.	Sektor beim Pd-Schmp.
	α_1 (Au)	α_2 (Pd)	H			
1	45,84	42,52	79,3	weiße Trommel Spaltdeckel	König-Martens 0,2 mm	$\frac{1}{100}$
2	45,92	42,64	79,5	schwarze Trommel Spaltdeckel	0,2	$\frac{1}{100}$
3	45,92	65,12	78,5	"	0,2	$\frac{1}{18}$
4	46,51	42,75	76,5	"	0,2	$\frac{1}{100}$
5	46,22	42,57	77,5	weiße Trommel Spaltdeckel	0,2	$\frac{1}{100}$
6	46,60	42,37	77,9	"	0,2	$\frac{1}{100}$
σ_1 (Au)	σ_2 (Pd)				Lummer-Brodhun	
7	100,57	79,46	79,0	"	0,1 0,5	$\frac{1}{100}$
Im Gelb						
	σ_1' (Au)	σ_2' (Pd)	H'(H)			
8	76,18	98,63	129,3 (78,7)	weiße Trommel Spaltdeckel	0,1 0,5	$\frac{1}{100}$
9	78,20	101,31	129,6 (78,9)	schwarze Trommel Deckel m. 7 mm Loch	0,1 0,4	$\frac{1}{100}$

Erst nach Abschluß dieser Vorversuche wurde die in § 1 erwähnte Verbesserung des Königlichen Photometers durch Verkürzung des Okularspalts sowie seine neue Justierung vorgenommen.

Die darauf angestellte Hauptversuchsreihe erstreckte sich auf die drei Farben Rot, Gelb und Grün mit den Wellenlängen 0,6568, 0,5893 und 0,5460 μ . Die Ergebnisse sind in Tab. 4 wiedergegeben. In dieser sind für die drei Farben die Winkel-einstellungen beim Goldschmelzpunkt und beim Palladium-schmelzpunkt und das sich daraus nach Formel 2 von § 1 ergebende Helligkeitsverhältnis eingetragen.

Um die in den verschiedenen Farben gemessenen Helligkeitsverhältnisse miteinander vergleichen zu können, wurde aus den im Gelb und Grün gefundenen Werten H' und H'' nach der Beziehung

$$\lg H = \lg H' \frac{\lambda'}{\lambda} = \lg H'' \frac{\lambda''}{\lambda}$$

der Wert H für $\lambda = 0,6563 \mu$ berechnet. (Eingeklammerte Zahlen unter H in Tabelle 3 und 4.)

Tabelle 4.

Relative Helligkeit beim Palladium- und Goldschmelzpunkt. Photometer nach König-Martens.

Beobachtungen am schwarzen Körper, F, beim Palladiumschmelzpunkt mit $\frac{1}{10}$ Sektor.

Beob.	Rot			Gelb			Grün		
	a_1 (Au)	a_2 (Pd)	H	a_1' (Au)	a_2' (Pd)	H'	a_1'' (Au)	a_2'' (Pd)	H''
1	46,84	43,63	79,9 ₁ (80,0 ₂)	35,70	39,51	131,7 ₀			
1a			81,1 ₅						
2	46,48	43,49	(80,9 ₁)	35,60	39,58	133,3 ₃			
2a			(82,4 ₇)				27,80	36,80	201,1 ₁
2b			82,2 ₉						
3	46,46	43,67	(81,7 ₆)	35,48	39,62	134,9 ₆			
3a			(83,0 ₆)				27,83	36,93	202,7 ₃
3b			81,2 ₇						
4	46,60	43,63	(82,8 ₁)	35,39	39,73	136,8 ₃			
4a			(82,7 ₆)				27,79	36,83	201,9 ₃
4b			81,4 ₉						
5	46,50	43,57	(81,2 ₂)	35,35	39,38	133,9 ₀			
5a			(81,6 ₀)				27,80	36,59	198,2 ₇
5b			81,2 ₁						
6	46,49	43,51	(81,5 ₅)	35,37	39,46	134,4 ₈			
6a			(80,3 ₇)				27,95	36,53	194,9 ₀
6b			81,2 ₃						
Mittel		im Rot im Gelb im Grün			81,2 ₃ (81,3 ₆) (82,0 ₄)			Gesamtmittel: 81,5 ₃	

Überblickt man die für das Helligkeitsverhältnis im Rot gefundenen Werte, so zeigt sich, daß die bei den Vorversuchen erhaltenen Werte merklich niedriger sind als die bei der Hauptversuchsreihe. Worauf dies zurückzuführen ist, ist nicht ganz klar. Die bessere Justierung des Photometers sollte wohl eine größere Einstellgenauigkeit, nicht aber eine einseitige Verschiebung des Helligkeitsverhältnisses zur Folge haben.

Das Gesamt Mittel aller, auch der bei den Vorversuchen gefundenen Werte ergibt das Helligkeitsverhältnis $H = 80,5$, das in unserer ersten Publikation von 1912¹⁾ angegeben wurde. Scheidet man dagegen die bei den Vorversuchen gemessenen Werte aus, so ergibt sich

$$H = 81,5.$$

Der Unterschied zwischen den Vorversuchen und der Hauptversuchsreihe war der Hauptgrund, warum wir zu der Tiegelmethode übergingen, die allerdings dann dasselbe Resultat wie die Hauptversuchsreihe mit dem Strahler F er gab.

2. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Kupferschmelzpunkt.

Die ersten Versuche mit dem in schmelzendes Metall tauchenden Hohlraumstrahler wurden mit Kupfer angestellt. So konnten ohne Gefährdung der kostbaren Metalle die nötigen Erfahrungen über die Handhabung der Methode gesammelt und gleichzeitig die Richtigkeit des Ergebnisses an dem Werte kontrolliert werden, der sich für die geringe und gut bekannte Temperaturdifferenz von etwa 20° zwischen dem Kupfer- und Goldschmelzpunkt im Vergleich zu älteren Bestimmungen ergab.

In einer ersten Versuchsreihe wurde die Helligkeit des Strahlers B beim Goldschmelzpunkt verglichen mit der des Hohlraumstrahlers in schmelzendem Kupfer. Zum Schluß wurde der Lummer-Kurlbaumsche Strahler ganz ausgeschaltet und die Helligkeit des Hohlraumstrahlers in schmelzendem Gold unmittelbar mit der in schmelzendem Kupfer verglichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 wiedergegeben.

1) Fr. Hoffmann u. W. Meißner, Zeitschr. f. Instrumkde. **32**, S. 201—202, 1912.

Tabelle 5.

Relative Helligkeit beim Kupfer- und Goldschmelzpunkt.

Photometer nach König-Martens.

B: Beobachtungen am schwarzen Körper B.

T: Beobachtungen am Hohlraumstrahler im Tiegel.

Beob.	Rot			Gelb			Grün			δT
	a_1 (Au)	a_2 (Cu)	H	a'_1 (Au)	a'_2 (Cu)	H'	a''_1 (Au)	a''_2 (Cu)	H''	
1	34,74	38,12	1,280							20,5
1a			(1,277)	25,39	28,54	1,313				20,3
1b			(1,262)				19,74		T	19,3
2a			(1,264)	25,50	28,52	1,298				19,5
2b			(1,277)				19,60		T	20,3
3	34,73	38,02	1,272							20,0
3a			(1,282)	25,32	28,52	1,319				20,7
3b			(1,277)				19,61		T	20,3
4	34,61	38,19	1,299							21,8
4a			(1,280)	25,35	28,53	1,317				20,5
4b			(1,278)				19,61		T	20,4
5a			(1,275)	25,49	28,60	1,311				20,2
6	34,95	38,19	1,267							19,7
6a			(1,254)	25,64	28,57	1,287				18,8
6b			(1,274)				19,72		T	20,1
									Gesamtittel:	20,2

Die in Gelb und Grün gefundenen Helligkeitsverhältnisse sind wiederum auf Rot umgerechnet worden. Die für die Kritik der Beobachtungen wichtigste Zahl, die Differenz der Schmelztemperatur des Goldes und Kupfers, ist in einer besonderen Spalte hinzugefügt worden. Sie berechnet sich aus dem gefundenen Helligkeitsverhältnis nach der Formel

$$\delta T = T_2 - T_1 = \bar{T}_1 \cdot T_2 \frac{1}{e} \cdot \ln H,$$

oder mit genügender Annäherung

$$\delta T = \frac{T^4 \lambda}{c} \cdot \ln H,$$

wobei

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 1346^\circ$$

die mittlere Temperatur zwischen Gold- und Kupferschmelzpunkt bedeutet und $c = 14300$ zu setzen ist, wenn λ in μ gemessen wird.

Die Versuche geben für die Differenz der Temperatur des Gold- und Kupferschmelzpunktes auf diesem optischen Wege

$$\delta T = 20,2^\circ \text{ C.}$$

Zur Kontrolle wurde noch eine rein thermoelektrische Messung dieser Differenz angeschlossen. Dazu wurde mit einem sorgfältig geeichten Platin-Platinrhodium-Thermoelement die Thermokraft einerseits, beim Schmelzpunkt des Goldes im Strahler F bestimmt und andererseits beim Schmelzpunkt des Kupfers, das im Tiegel unter derselben Bedingung wie bei den optischen Beobachtungen schmolz. Beim Goldschmelzpunkt ergab sich im Mittel aus 5 Beobachtungen die Thermokraft zu $10823,6 \cdot 10^{-6}$ V. Beim Kupferschmelzpunkt wurde im Mittel aus je 3 bis 4 Beobachtungen gefunden:

bei 3 cm Eintauchtiefe $10563 \cdot 10^{-6}$ V.

bei 4 cm Eintauchtiefe $10565 \cdot 10^{-6}$ V.,

Es ergibt sich also für die Differenz der Thermokraft $241,6 \cdot 10^{-6}$ V. und daraus bei einer Empfindlichkeit des Thermoelements von $11,81 \cdot 10^{-6}$ V/Grad die Temperaturdifferenz zwischen Gold- und Kupferschmelzpunkt zu

$$T = 20,4^\circ.$$

Beide Werte, der optisch und der thermoelektrisch gemessene, stimmt sowohl untereinander wie auch mit den sonst gemessenen aufs beste überein.

3. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt unter Verwendung des Hohlräumstrahlers in schmelzenden Metall.

Wie beim Gold- und Kupferschmelzpunkt wurde auch hier zunächst in einer Versuchsreihe die Helligkeit des Strahlers

B beim Goldschmelzpunkt verglichen mit der Helligkeit des Hohlraumstrahlers im schmelzenden Palladium. In einer zweiten Reihe wurde sodann die Helligkeit des Hohlraumstrahlers im schmelzenden Gold unmittelbar verglichen mit der im schmelzenden Palladium.

Die Ergebnisse sind in Tab. 6 wiedergegeben.

Wie früher ist auch hier das im Gelb und Grün gefundene Helligkeitsverhältnis auf das im Rot umgerechnet. Für diesen Wert ergibt

die erste Reihe im Mittel $H = 81,58$

die zweite Reihe im Mittel $H = 81,67$.

Nach Abschluß der Beobachtungen stellte sich aber heraus, daß das im Tiegel geschmolzene Palladium eine Erhöhung seines Schmelzpunktes um $0,75^{\circ}$ gegenüber dem Palladiumdraht zeigte, mit dem es vor der Versuchsreihe übereinstimmte. Man wird annehmen müssen, daß diese Änderung im wesentlichen die zweite Hälfte der Beobachtungen beeinflußt haben wird. Berücksichtigt man dies, so erhält man für

die zweite Reihe im Mittel: $H = 81,47^1)$

das Gesamtmittel wird somit: $H = 81,5$

Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Hauptversuchsreihe am Strahler *F*. Er ist als Endergebnis der vorliegenden Messungen anzusehen.²⁾

§ 6. Folgerungen für die Temperaturskala oberhalb des Goldschmelzpunktes.

Der hier ermittelte Wert für das Verhältnis der Helligkeiten des Hohlraumstrahlers bei den beiden Temperaturen T_1

1) Die geringen Abweichungen der Mittelwerte für die 1. und 2. Reihe gegenüber den in der Zeitschr. f. Instr. 33, S. 157, 1913 angegebenen Werten sind auf kleine nachträgliche Korrekturen zurückzuführen.

2) Das Helligkeitsverhältnis beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt ist inzwischen von P. Hyde, F. E. Cady und W. C. Forsythe (Astrophys. Journ. 42, S. 294—304, 1915) neu bestimmt worden. Die Verfasser finden mit dem Holborn-Kurlbaum-Pyrometer bei einer wirksamen Wellenlänge $0,664, \mu$ dafür 76,9, woraus sich für die von uns benützte Wellenlänge $0,656, \mu$ der Wert 81,2 ergibt, der mit dem von uns in Zeitschr. f. Instr. 33, S. 156, 1913 angegebenen gut übereinstimmt.

Tabelle 6.

Relative Helligkeit beim Palladium- und Goldschmelzpunkt.

Photometer nach König-Martens.

B: Beobachtungen am schwarzen Körper B.

T: Beobachtungen am Hohlraumstrahler im Tiegel, beim Palladiumschmelzpunkt mit $\frac{1}{100}$ Sektor.

Beob.	Rot			Gelb			Grün		
	a_1 (Au)	a_2 (Pd)	H	a'_1 (Au)	a'_2 (Pd)	H'	a''_2 (Au)	a''_2 (Pd)	H''
1	<i>B</i> 35,04	<i>T</i> 32,34	81,52						
1a			(82,31)	<i>B</i> 25,51	<i>T</i> 29,09	135,91			
1b	<i>B</i> 35,29	<i>T</i> 32,52	(82,08)				<i>B</i> 19,61	<i>T</i> 26,74	109,97
2	<i>B</i> 35,29	<i>T</i> 32,52	81,15	<i>B</i> 25,68	<i>T</i> 29,22	135,31			
2a			(81,99)						
2b	<i>B</i> 35,29	<i>T</i> 32,55	(82,77)				<i>B</i> 19,70	<i>T</i> 26,97	201,97
3	<i>B</i> 35,29	<i>T</i> 32,55	81,36	<i>B</i> 25,72	<i>T</i> 29,18	134,4			
3a			(81,44)						
3b	<i>B</i> 35,13	<i>T</i> 32,50	(80,63)				<i>B</i> 19,81	<i>T</i> 26,74	195,7
4	<i>B</i> 35,13	<i>T</i> 32,50	81,98	<i>B</i> 25,66	<i>T</i> 29,17	135,0			
4a			(81,81)						
4b			(80,02)				<i>B</i> 19,96	<i>T</i> 26,83	193,9
Mittel aus Beob. 1 bis 4			{ im Rot 81,50 im Gelb (81,89) im Grün (81,37) }	Gesamtmittel 81,58					
5	<i>T</i> 34,90	<i>T</i> 32,09	80,81						
5a			(80,89)	<i>T</i> 25,45	<i>T</i> 28,79	133,3			
5b	<i>T</i> 35,03	<i>T</i> 32,44	(80,97)				<i>T</i> 19,63	<i>T</i> 26,58	196,7
6	<i>T</i> 35,03	<i>T</i> 32,44	82,20						
6a			(81,78)	<i>T</i> 25,51	<i>T</i> 29,00	134,92	<i>T</i> 19,73	<i>T</i> 26,87	199,57
6b			(81,94)						
7	<i>T</i> 34,92	<i>T</i> 32,49	83,23						
7a			(81,34)	<i>T</i> 25,55	<i>T</i> 28,97	134,12			
7b			(81,83)				<i>T</i> 19,66	<i>T</i> 26,76	199,22
Mittel aus Beob. 5 bis 7			{ im Rot 82,08 im Gelb (81,34) im Grün (81,58) }	Gesamtmittel 81,67					

und T_2 des Gold- und Palladiumschmelzpunktes kann dazu dienen, die Temperaturskala am Palladiumschmelzpunkte festzulegen, wenn der Wert des Goldschmelzpunktes und die Konstante des Wien-Planckschen Gesetzes als hinreichend gesichert angesehen werden. Legt man für den Goldschmelzpunkt den Wert

$$T_1 = 1336^\circ, \quad t_1 = 1063^\circ \text{ C}$$

und für die Exponentialkonstante¹⁾ des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes den Wert

$$c = 14300$$

zugrunde, so ergibt die Formel

$$\ln H = \frac{c}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

für den Palladiumschmelzpunkt den Wert

$$T_2 = 1830^\circ, \quad t_2 = 1557^\circ \text{ C}.$$

Die Physikalisch-Technische Reichsanstalt hat bei Aufstellung der vom 1. April 1916 an gültigen Temperaturskala²⁾ für Temperaturen bis 1100° die neueren gasthermometrischen Beobachtungen zugrunde gelegt, die hinreichend untereinander übereinstimmen. Für die Festlegung der Temperaturen oberhalb 1100° ist den radiometrischen Messungen der Vorzug gegeben worden. Insbesondere soll für die isochromatische Meßmethode der nunmehr ziemlich gesicherte Wert der Wien-Planckschen Strahlungskonstanten $c = 14300$ angenommen werden. Demgemäß ist auch der Palladiumschmelzpunkt in Übereinstimmung mit unseren Messungen zu 1557° angesetzt worden. Von dem durch gasthermometrische Beobachtungen von Day und Sosman gefundenen Wert von $1549,2^\circ$ weicht dieser um fast 8° ab und es erhebt sich die Frage, wie dieser Unterschied zu erklären ist. Da sich bei einer unmittelbaren Vergleichung des Schmelzpunktes einer von Hrn. Day zur Verfügung gestellten Probe seines im Tiegel geschmolzenen Palladiums und des von uns verwendeten Metalls eine vollkommene Übereinstimmung ergeben hatte, scheidet das Bedenken hinsichtlich des benutzten Materials aus. Anders ver-

1) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. 48, S. 430. 1915.

2) Ann. d. Phys. 48, S. 1034—1036. 1915; Zeitschr. f. Instr. 36, S. 20—21. 1916.

hält es sich mit der Meßmethode. Day und Sosman schmelzen eine verhältnismäßig kleine Menge (128—210 g) Palladium im Magnesiatiegel in Luft. Nach unseren Erfahrungen wird aber Schmelz- und Erstarrungspunkt des Palladiums unter diesen Umständen vollkommen unscharf, während eine mit Spratzen unter Gasabgabe verknüpfte Unstetigkeit etwa 7° unterhalb des Erstarrungspunktes (also fast genau bei der von Day und Sosman angegebenen Temperatur) allein noch deutlich hervortritt. Die naheliegende Annahme, daß diese Unstetigkeit im Temperaturgange von Day und Sosman als Erstarrungspunkt angesehen wurde, wird man bei so sorgfältigen Beobachtern nur ungern machen; sie scheint aber auch aus folgendem Grunde auszuscheiden: Die Reichsanstalt besitzt ein Thermoelement „O“ aus Platin-Platinrhodium, dessen Schenkel demselben Drahtvorrat entstammen, wie das von Day und Sosman benutzte. Mit diesem Element ergab sich für den Palladiumschmelzpunkt nach der Schmelzdrahtmethode sehr nahe dieselbe Thermokraft wie von diesen Autoren angegeben wird. Hiernach dürfte die Day und Sosmansche Bestimmung des Palladiumschmelzpunktes im wesentlichen richtig sein. Die Frage, wie sie unter den gegebenen Umständen möglich war, und wie die vorhandene Diskrepanz zu erklären ist, muß demnach offen bleiben.

Zusammenfassung.

Die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt wurde nach zwei verschiedenen Methoden gemessen: Erstens unter Verwendung eines verbesserten Hohlraumstrahlers nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip, wobei die Schmelzpunkte in dem Strahler nach der Drahtmethode bestimmt wurden. Zweitens unter Verwendung von Hohlraumstrahlern, die in das schmelzende Metall eingetaucht waren.

Zur Erprobung der letzteren Methode wurden auch Messungen am Kupferschmelzpunkt angestellt.

Für die Helligkeitsmessungen wurde ein König-Martensches Spektralphotometer benutzt.

Für die relative Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt ergab sich der Wert 81,5, bei der Wellenlänge $0,6563 \mu$.

Das verwendete Palladium hat genau denselben Schmelzpunkt wie das von Day und Sosman bei ihrer gasthermometrischen Bestimmung des Palladiumschmelzpunktes verwendete Palladium, was durch direkten Vergleich festgestellt wurde. Die Schmelzpunkte verschiedener Palladiumproben, die nach Angabe der Firma Heraeus nach mehrmaligem Umlösen von Palladosaminchlorid durch Fällen mit Quecksilbercyanid erhalten wurden, stimmten untereinander überein. Der Schmelzpunkt derartig gereinigten Palladiums kann als guter Fixpunkt bezeichnet werden, sofern die Drahtmethode benutzt wird oder Schmelz- und Erstarrungspunkte im Tiegel unter Stickstoffspülung bestimmt werden.

Setzt man nach den Messungen von Warburg und Müller als wahrscheinlichsten Wert für die Strahlungskonstante $c = 14300$ an und für den Goldschmelzpunkt 1063° , so ergibt sich für den Palladiumschmelzpunkt 1557° .

Dieser Wert ist um etwa 8° höher als der von Day und Sosman auf gasthermometrischem Wege gefundene Wert $1549,2^\circ$. Worauf diese Differenz zurückzuführen ist, konnte nicht aufgeklärt werden.

(Eingegangen 30. Mai 1919.)

**2. Über die Gestalt und die Auflösung des
fallenden Flüssigkeitsstrahles;
von Robert Scheuermann.**

(Bearbeitung der Gießener Dissertation.)

A. Einleitung.

Die Gestalt des Flüssigkeitsstrahles wurde bereits von Newton¹⁾ in seinen mathematischen Prinzipien zur Ableitung des Torricellischen Theorems benutzt und darin Katarakte genannt. Aber ihre Gleichung ist erst viel später von Weisbach²⁾ in seiner Experimentalhydraulik für einen unter Wirkung der Schwerkraft stehenden aus kreisförmiger Öffnung vertikal nach oben springenden Strahl berechnet worden. An einer anderen Stelle³⁾ berücksichtigt er bei ihrer Ableitung noch den Einfluß des Luftwiderstandes. Allein diese Gleichung wurde weder von ihm noch später von einem anderen Physiker einer genauen experimentellen Prüfung unterzogen. Die theoretischen Untersuchungen über die Ableitung der Strahlform aus den hydrodynamischen Grundgleichungen, die von Helmholtz, Kirchhoff, Lord Rayleigh u. a. für eine Anzahl besonderer Fälle ausgeführt wurden, haben mit der vorliegenden Arbeit nichts zu tun, da es sich dort um zweidimensionale Flüssigkeitsbewegungen handelt, die nicht unter dem Einfluß der Schwerkraft erfolgen.

Mehrmals ist die Gestalt des Wasserstrahles ausführlich beschrieben⁴⁾, einmal auch gemessen worden und zwar berichtet darüber Viktor von Lang⁵⁾ in einer Arbeit über Reibung zwischen Wasser und Luft. Allein er beschränkt sich darin bloß auf den Strahlteil in der Entfernung von 35—75 cm von der Ausflußöffnung und stellt dafür eine ganz empirisch gefundene Formel auf. In der vorliegenden Arbeit soll dagegen

1) Newton, Phil. nat. math. princ. S. 303. 1714.

2) Weisbach, Die Experimentalhydraulik. S. 51. 1855.

3) Weisbach, Ingenieur u. Maschinenmechanik. I. S. 758. 1855.

4) Savart, Pogg. Ann. 33. S. 451. 1834; Magnus, Pogg. Ann. 95. S. 1. 1855; 106. S. 1. 1859.

5) von Lang, Wied. Ann. 3. S. 219. 1878.

hauptsächlich der Strahlteil unmittelbar an der Ausflußöffnung bis zu einem Abstand von ungefähr 9 cm von derselben betrachtet werden.

Da der senkrecht nach oben springende Strahl durch die nach seiner Auflösung wieder herabfallenden Tropfen erheblich gestört wird, eignet er sich nicht für die experimentelle Untersuchung der Strahlform. Viel bequemer dagegen ist die Ausmessung des vertikal nach unten fließenden Strahles, der in der Literatur kurz „der fallende Strahl“ genannt wird. Auf seine Untersuchung werde ich mich im folgenden daher beschränken.

B. Die Gestalt des fallenden Flüssigkeitsstrahles.

a) Die Gleichung der unter Berücksichtigung der Schwerkraft abgeleiteten Meridiankurve des Strahles.

Ganz entsprechend der Weisbachschen Ableitung ergibt sich für die Meridiankurve des fallenden Strahles die Gleichung:

$$(1) \quad x = \frac{x_0}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gy}{v_0^2}}},$$

in der v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und x_0 den Radius der Ausflußöffnung bedeuten. (Für die Ableitung vgl. auch weiter unten unter b.) Sie läßt sich auch in der nach y aufgelösten Form:

$$(2) \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^4 - 1 \right],$$

schreiben, und soll im folgenden kurz die „Weisbachsche Gleichung“ genannt werden.

Der Einfluß der Oberflächenspannung auf die Strahlform.

Die experimentellen Untersuchungen, auf die ich später ausführlich eingehen werde, zeigen, daß der wirkliche Strahlquerschnitt an allen Stellen größer ist, als der entsprechende, welchen man aus der Weisbachschen Formel erhält. Die Ursachen für diese Abweichungen sind sicherlich zum großen Teil in der Oberflächenspannung zu suchen, die ja bei der Weisbachschen Ableitung ganz vernachlässigt wird. Diese Annahme wird durch folgenden Versuch bestätigt: Setzt man die Oberflächenspannung dadurch herab, daß man die Strahloberfläche mit einer dünnen Ölschicht sich überziehen läßt,

oder indem man den Strahl durch eine mit Ätherdampf gesättigte Atmosphäre fließen läßt, so nimmt seine Dicke etwas ab, was man daran erkennt, daß der Strahl scheinbar etwas in die Öffnung hineingezogen wird.

Da nach dem Laplaceschen Gesetze der von der Krümmung einer Flüssigkeitsoberfläche herrührende Kohäsionsdruck:

$$(3) \quad p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

ist, in der R_1 und R_2 der kleinste und größte Krümmungsradius und α die Kapillarkonstante bedeuten, sollen in folgendem Abschnitt zunächst die Krümmungsverhältnisse der Weisbachschen Strahlform untersucht werden.

Die Krümmungsverhältnisse der Strahloberfläche.

Wir betrachten irgend einen Punkt der Strahloberfläche mit den Koordinaten x, y, z und denken uns durch ihn zwei senkrecht zueinander stehende ebene Schnitte gelegt. Der Einfachheit halber wählen wir einen Normalschnitt so, daß er aus der Strahloberfläche die Meridiankurve ausschneidet. Bezeichnet man dann die Krümmung im Punkte P dieses Normalschnittes mit $1/R_1$ und in dem senkrecht dazu stehenden Schnitt mit $1/R_2$, so beträgt die mittlere Krümmung k der Strahloberfläche im Punkte P :

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Was die Vorzeichenfestsetzung betrifft, soll der Teil der Flächennormalen, welcher von der Strahloberfläche aus betrachtet nach außen gerichtet ist, positiv gerechnet werden und entsprechend R positiv oder negativ sein, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes auf der positiven oder negativen Seite der Flächennormalen liegt.

Für die Krümmung im Meridianschnitt erhält man:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{20x_0^4 c^3 x^6}{(c^3 x^{10} + 16x_0^8)^{5/2}},$$

worin der Abkürzung wegen

$$\frac{2g}{x_0^2} = c$$

gesetzt ist. Die Krümmung in dem dazu senkrecht stehenden Normalschnitt beträgt:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin \vartheta}{x},$$

worin

$$\tan \vartheta = \frac{dy}{dx}$$

ist, oder ausgerechnet:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{-4x_0^4}{x(c^2x^{10} + 16x_0^8)^{1/2}}.$$

Die mittlere Krümmung im Punkte P ist folglich:

$$(4) \quad k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{16x_0^4(c^2x^{10} - 4x_0^8)}{x(c^2x^{10} + 16x_0^8)^{1/2}}.$$

Hieraus ersieht man, daß das Vorzeichen für die mittlere Krümmung einzig und allein von dem Ausdruck $c^2x^{10} - 4x_0^8$ abhängt. Sie wird für alle Werte von x , für die $c^2x^{10} > 4x_0^8$ ist, positiv und entsprechend für $c^2x^{10} < 4x_0^8$ negativ. Von besonderem Interesse ist die Lage derjenigen Stelle, für die die mittlere Krümmung Null ist. Dies ist für

$$x = \sqrt[5]{\frac{x_0^4 v_0^2}{g}}$$

der Fall. Der Abstand dieser Stelle von der Ausflußöffnung beträgt:

$$y = \frac{(gx_0)^{4/5} v_0^{2/5} - v_0^2}{2g}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß der Abstand der betrachteten Stelle von der Ausflußöffnung einerseits von der Größe derselben und andererseits von der Ausflußgeschwindigkeit abhängt. Für die Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{g}x_0$ fällt diese Stelle auf den Rand der Ausflußöffnung und die Strahloberfläche hat dann überall für die mittlere Krümmung dasselbe Vorzeichen. Andererseits hat die betrachtete Stelle für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_0 = 0,9657 \sqrt{g}x_0$$

ihren größten Abstand von der Ausflußöffnung, nämlich:

$$y_{\max} = 0,2675 x_0.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Stelle, an der die mittlere Krümmung der Strahloberfläche ihr Vorzeichen wechselt, sehr nahe an der Ausflußöffnung liegt und höchstens einen Abstand von ihr haben kann, der den 7,5. Teil des Öffnungsdurchmessers beträgt. Für denjenigen Teil der Strahloberfläche, der

zwischen der Ausflußöffnung und der zuletzt betrachteten Stelle von der mittleren Krümmung Null liegt, ist die mittlere Krümmung entsprechend der obigen Vorzeichenfestsetzung positiv, für den ganzen übrigen Teil negativ. Das würde bedeuten, daß in unmittelbarer Nähe der Ausflußöffnung der Kohäsionsdruck nach außen, jenseits der Stelle, wo die mittlere Krümmung Null ist, aber nach innen wirkt. Die Oberflächen- spannung müßte also in dem Teil, wo der Kohäsionsdruck nach außen gerichtet ist, den Strahlquerschnitt vergrößern, im übrigen Strahlteile aber, da er dort nach innen wirkt, den Querschnitt verkleinern. Diese Überlegung stimmt aber nicht mit den tatsächlichen Verhältnissen überein, denn die experimentelle Untersuchung zeigt, daß der gemessene Strahlquerschnitt überall größer ist als der nach der Weisbachschen Gleichung berechnete. Das Fehlerhafte bei der letzten Betrachtung scheint mir darin zu liegen, daß das Problem gleichsam als ein statisches aufgefaßt wurde. Wir haben hier nämlich nicht untersucht, welchen Einfluß die Oberflächenspannung auf die Strahlform hat, sondern auf eine gleichsam ruhende Flüssigkeitsmasse, die die Gestalt eines unter der Wirkung der Schwerkraft ausfließenden Flüssigkeitsstrahles hat. Die Oberfläche bildet sich vielmehr fortwährend aus neuer Flüssigkeit. Jede aus der Ausflußöffnung austretende Flüssigkeitsmasse muß eine neue Oberfläche bilden, die sich, während sie den Strahl durchfließt, fortwährend in gesetzmäßiger Weise umbildet. Da die Oberflächenspannung aber jeder Oberflächenvergrößerung entgegen wirkt, kann eine solche nur auf Kosten der kinetischen Energie der Flüssigkeit erfolgen. Diese auf dem Energieprinzip beruhende Überlegung hat vor den Betrachtungen über die Krümmungsverhältnisse den Vorzug, daß sie zu einem verhältnismäßig einfachen Ansatz führt, der den wirklichen Verhältnissen näher kommt.

b) Ableitung der Gleichung für die Strahlform unter Berücksichtigung der Schwerkraft und der Oberflächen- spannung.

Es kommt also im zweiten Ansatz darauf an, neben der Schwerkraft noch die Oberflächenspannung in die Formel einzuführen. Dies ermöglicht in einfachster Form folgende von Prof. Dr. König herrührende Überlegung. Nicht die gesamte Arbeit, welche die Schwerkraft leistet, findet ihr Äqui-

valent in dem Zuwachs der lebendigen Kraft der Flüssigkeitsteilchen, sondern ein Teil derselben wird den Kapillarkräften gegenüber zur Vergrößerung der Strahloberfläche verbraucht. Diesen Teil werde ich kurz die Kapillararbeit nennen. Nach dem Energieprinzip besteht folgende Wortgleichung:

Schwerarbeit — Kapillararbeit = Zuwachs der lebendigen Kraft.

Da die Kapillararbeit gleich dem Produkt aus der Kapillarkonstanten α und der Oberflächenvergrößerung dO ist, so besteht folgende Gleichung:

$$(5) \quad mg dy = mv dv + \alpha dO,$$

in der y die Fallstrecke, m die Masse des Volums V und v die Geschwindigkeit bedeuten. Der weiteren Betrachtung lege ich einen ganz niederen Flüssigkeitszylinder von dem Radius x und der Höhe h zugrunde. Ist ferner σ die Dichte, so bestehen folgende Beziehungen:

$$V = \frac{m}{\sigma} \quad \text{und} \quad V = q \cdot h = \pi x^2 h.$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist dann:

$$O = 2\pi x h = \frac{2V}{x} = \frac{2m}{\sigma x}$$

und somit die Oberflächenänderung:

$$dO = -\frac{2m}{\sigma x^2} dx.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (5) dieser Ableitung ein, berücksichtigt noch die Kontinuitätsbedingung: $v \cdot q = v_0 q_0$ und läßt die y -Achse so mit der Zylinderachse zusammenfallen, daß ihre positive Richtung die Richtung der Flüssigkeitsbewegung angibt, dann erhält man:

$$mg dy = -\frac{m v_0^2 q_0^2 dq}{q^6} - \frac{2m \alpha dx}{\sigma x^2}.$$

Wenn man ferner q und q_0 durch x und x_0 ausdrückt und gleichzeitig einige Umformungen vornimmt, bekommt man folgende Differentialgleichung:

$$g dy = -\frac{2v_0^2 x_0^4 dx}{x^5} - \frac{2\alpha}{\sigma x^2} dx.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist die Gleichung der Meridiankurve des Flüssigkeitsstrahles:

$$(6) \quad y = \frac{v_0^2}{2g} \left[\left(\frac{x_0}{x} \right)^4 - 1 \right] + \frac{2\alpha}{\sigma x_0 g} \left[\frac{x_0}{x} - 1 \right].$$

Ihre rechte Seite ist eine zweigliedrige Summe, deren erstes Glied nichts weiter als die rechte Seite der Weisbachschen Gleichung (2) ist. Das zweite Glied ist im Gegensatz zum ersten von der Ausflußgeschwindigkeit völlig unabhängig und enthält neben der Schwerkraftbeschleunigung und dem Verhältnis x_0/x noch die Kapillarkonstante a und die Dichte σ . Für $a = 0$ verschwindet dieses Glied und die Gleichung geht in die Weisbachsche Gleichung (2) über. Für einen bestimmten x -Wert erhält man die ihm nach dem zweiten Ansatz zugehörige Ordinate y_2 , indem man zu der nach der Weisbachschen Gleichung berechneten Ordinate y_1 noch das Glied

$$\frac{2a}{\sigma x_0 g} \left(\frac{x_0}{x} - 1 \right),$$

hinzufügt, was die numerische Ausrechnung wesentlich vereinfacht. Aus dieser Betrachtung geht außerdem hervor, daß der aus dem Ansatz mit Berücksichtigung der Oberflächen- spannung berechnete Strahlquerschnitt in der Tat größer ist als der nach der Weisbachschen Formel für denselben Abstand von der Ausflußöffnung sich ergebende Querschnitt.

Experimenteller Teil.

a) Versuchsbedingungen.

Bei der Ableitung der Meridiankurvengleichung wurde stillschweigend angenommen, daß die Flüssigkeitsbewegung stationär und die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen längs des ganzen Querschnittes der Ausflußöffnung der Größe und Richtung nach dieselbe sei. Die erste Voraussetzung läßt sich annähernd dadurch erfüllen, daß man ein weites Ausflußgefäß wählt, die zweite durch Anwendung eines Ausflußrohres von kreisförmigem Querschnitt. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Ausflußöffnung und in dem oberen Strahlteil wurde mit Sonde und Manometer untersucht. Es zeigte sich, wie zu erwarten war, daß die Geschwindigkeit in der Mitte der Öffnung am größten und nach dem Rande zu zunächst allmählich, in nächster Nähe dagegen rasch abnimmt. Ähnlich ist die Verteilung im oberen Teil des freien Flüssigkeitsstrahles bis zu einem Abstand, der ungefähr dem Durchmesser der Ausflußöffnung gleichkommt, wo die Geschwindigkeitsunterschiede verschwinden. Wenn auch die Messungen mit der

Sonde keine völlig einwandfreien Resultate liefern, so geben sie doch annähernd ein Bild über die Geschwindigkeitsverteilung und im voraus einen Anhaltspunkt, wo eventuell größere Abweichungen zu erwarten sind.

b) Ausflußrohr und Ausflußgeschwindigkeit.

Als Ausflußröhren wurden Messingröhren von 15—30 cm Länge in drei verschiedenen Weiten, nämlich: 0,906, 1,114 und 1,578 cm benutzt. Der Rand der Ausflußöffnung wurde konisch von außen nach innen so abgedreht, daß die lichte Weite unverändert blieb und die Wandstärke höchstens 0,1—0,2 mm betrug.

Die Ausflußgeschwindigkeit wurde ausschließlich aus der Ausflußmenge M in der Zeiteinheit und dem Querschnitt Q der Ausflußöffnung nach der Beziehung:

$$v_m = M/Q$$

bestimmt.

c) Messung der Strahlform.

All die Schwierigkeiten, die die Messung am Strahle selbst mit sich bringt, konnten dadurch umgangen werden, daß die Ausmessung an seiner photographischen Momentaufnahme vorgenommen wurde. Um die Aufnahme (vgl. Fig. 1, S. 255) in genau derselben Größe, die der Strahl selbst hat, zu erhalten, wurde mit parallelem Licht ohne Kamera gearbeitet. Die Versuchsanordnung war folgende: ein Bündel Sonnenstrahlen fiel auf einen ebenen, silberbelegten Spiegel und wurde von da auf einen kleinen Projektionskopf geworfen und von diesem im Brennpunkte vereinigt. An dieser Stelle befand sich eine Blende mit feiner Öffnung und davor ein Momentverschluß. Ein zweiter Projektionskopf mit sehr großer Öffnung wurde so aufgestellt, daß sein Brennpunkt in die Blendenöffnung fiel. Die Strahlen mußten also, nachdem sie den zweiten Projektionskopf passiert hatten, untereinander parallel sein, was außerdem auf die üblichen Arten geprüft wurde. Bei späteren Versuchen wurde an Stelle der Blende eine Funkenstrecke aus Zinkelektroden gesetzt und die Aufnahme mit dem Funken einiger Leidener Flaschen beim Öffnen des Primärstromes eines Induktoriums gemacht. In dieses Parallelstrahlenbündel wurde dann der zu photographierende Flüssigkeitsstrahl und unmittelbar dahinter die photographische

Platte gebracht. Das Photogramm ist also das Schattenbild des Strahles auf der Platte. Daß die Strahlen parallel waren, konnte auch aus folgendem Vorversuch geschlossen werden. Ein kurzes Ausflußrohr, das vorher an verschiedenen Stellen gemessen worden war, wurde auf die angegebene Art aufgenommen. Die Ausmessungen seines Photogrammes stimmten, soweit die Genauigkeit des Kathetometers es zuließ, mit denjenigen des Originals vollständig überein. Daraus konnte ferner der für die folgenden Ausmessungen überaus wichtige Schluß gezogen werden, daß die beim Entwickeln und Fixieren der Platte eintretende Schichtverziehung nur sehr gering ist. Die Ausmessungen wurden mit dem Kathetometer ausgeführt, das anstatt des Fernrohres mit einem schwach vergrößernden Mikroskop versehen worden war.

Vergleich der Versuchsresultate mit den berechneten Werten.

In den folgenden Tabellen werde ich einige der Versuchsreihen wiedergeben, die auf die zuletzt angegebene Weise erhalten wurden. In der ersten Spalte steht der Abstand y von der Ausflußöffnung. Die zweite Kolumnen enthält den zu-

Tabelle 1.

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7,881 \text{ cm/sec}$,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0,789 \text{ cm}$.

Abstand v. d. Ausfluß- öffnung y (in cm)	Berechnet		gemessen	Ab- weichung $x_2 - x_0$ (in cm)	Ab- weichung $x_2 - x_1$ (in cm)
	nach Weisbach	u. Berücks. d. Oberfl.			
x_0 (in cm)	x_1 (in cm)	x_2 (in cm)	x_2 (in cm)	$x_2 - x_0$ (in cm)	$x_2 - x_1$ (in cm)
0,0000	0,789	0,789	0,795	0,006	0,006
0,0168	0,709	0,750	0,763	0,054	0,013
0,0434	0,636	0,700	0,729	0,093	0,029
0,0775	0,579	0,650	0,688	0,109	0,038
0,1225	0,531	0,600	0,648	0,117	0,048
0,1846	0,488	0,550	0,599	0,111	0,049
0,2740	0,448	0,500	0,542	0,094	0,042
0,4100	0,408	0,450	0,489	0,081	0,039
0,6313	0,369	0,400	0,425	0,056	0,025
1,0226	0,328	0,350	0,363	0,035	0,013
1,7896	0,286	0,300	0,306	0,020	0,006
2,4645	0,265	0,275	0,277	0,012	0,002
3,5128	0,242	0,250	0,251	0,009	0,001
5,2230	0,220	0,225	0,226	0,006	0,001
8,1810	0,196	0,200	0,201	0,005	0,001

Tabelle 2.
Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = 5,643$ cm/sec,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0,572$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß- öffnung y (in cm)	Berechnet nach Weißbach x_0 (in cm)	Berechnet u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)	gemessen x_2 (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_0)$ (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_1)$ (in cm)
0,0000	0,572	0,572	0,577	0,005	0,005
0,0493	0,404	0,500	0,514	0,110	0,014
0,0972	0,352	0,450	0,471	0,119	0,021
0,1643	0,313	0,400	0,426	0,113	0,026
0,2657	0,280	0,350	0,374	0,094	0,024
0,4357	0,249	0,300	0,316	0,067	0,016
0,7659	0,217	0,250	0,255	0,038	0,005
1,0655	0,200	0,225	0,227	0,027	0,002
1,5567	0,182	0,200	0,202	0,020	0,002
2,4300	0,163	0,175	0,176	0,013	0,001
4,2317	0,142	0,150	0,151	0,009	0,001
6,4191	0,134	0,140	0,140	0,006	0,000

Tabelle 3.
Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = 7,756$ cm/sec,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0,453$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß- öffnung y (in cm)	berechnet nach Weißbach x_0 (in cm)	berechnet u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)	gemessen x_2 (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_0)$ (in cm)	Ab- weichung $(x_2 - x_1)$ (in cm)
0,0000	0,453	0,453	0,467	0,014	0,014
0,0636	0,342	0,400	0,418	0,076	0,018
0,1528	0,290	0,350	0,375	0,085	0,025
0,2976	0,250	0,300	0,312	0,062	0,012
0,5687	0,215	0,250	0,254	0,039	0,004
1,1950	0,179	0,200	0,201	0,022	0,001
1,8716	0,161	0,175	0,176	0,015	0,001
3,1881	0,142	0,150	0,150	0,008	0,000
4,6360	0,129	0,135	0,135	0,006	0,000
6,1258	0,120	0,125	0,125	0,005	0,000
7,1138	0,116	0,120	0,121	0,005	0,001

gehörigen nach der Weißbachschen Formel berechneten Radius x_0 des Strahles und die dritte den unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechneten Radius x_1 . In der vierten Spalte dagegen steht der aus dem gemessenen Strahldurchmesser erhaltene Radius x_2 . Die letzten beiden

Kolumnen endlich enthalten die Abweichungen dieses Wertes von den berechneten Werten. Der bei der Berechnung von x_1 zugrunde gelegte Wert der Kapillarkonstanten α ist der aus den Methoden der Lamellenspannung und der Steighöhe gefundene Mittelwert für das benutzte destillierte Wasser. Er beträgt $\alpha = 78,89 \text{ dyn/cm}$.

Die Tabellen zeigen, daß die unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechneten x -Werte den gemessenen bedeutend näher kommen als die nach der Weisbachschen Formel gefundenen Werte. In einer Entfernung von der Ausflußöffnung, die etwas größer ist als der Durchmesser, stimmen jene Werte sehr gut mit den gemessenen Werten überein. Allein in nächster Nähe sind die Abweichungen von den gemessenen Werten sehr bedeutend. Die Ursachen, welche jene Abweichungen bedingen, sind im wesentlichen folgende:

Einmal wird der Strahlquerschnitt unmittelbar an der Ausflußöffnung infolge der Adhäsion der Flüssigkeit an der Rohrwand etwas vergrößert. Dieser von der Adhäsion herührende Fehler kann wohl durch das konische Abdrehen der Ausflußröhre verkleinert, nie aber, wie aus den vorstehenden Tabellen für $y = 0$ deutlich hervorgeht, völlig beseitigt werden. Die durch die Adhäsion bedingten Abweichungen betragen in den angeführten Beispielen für $y = 0$: 0,006; 0,005 cm und im dritten Fall, wo die Wandstärke weit größer war als in den beiden anderen Fällen, sogar 0,014 cm. Wohl ließe sich dieser Übelstand noch weiter dadurch abschwächen, daß man den Rand der Ausflußöffnung ein wenig einfettet. Weil aber dadurch die Strahloberfläche leicht verunreinigt und die Oberflächenspannung herabgesetzt wird, wurde bei den Versuchen davon Abstand genommen.

Ein weiterer Umstand, der mit als Ursache für diese Abweichungen angeführt werden muß, ist die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung in der Ausflußöffnung selbst und in den Strahlquerschnitten in ihrer Nähe. Daß ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsverteilung und diesen Abweichungen besteht, geht schon daraus hervor, daß in einem Abstand von der Ausflußöffnung von der Größe ihres Durchmessers, wo mit Sonde und Manometer keine Ungleichmäßigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung mehr festgestellt werden konnte, auch die Abweichungen kleiner werden.

Daß aber die eben angeführten Tatsachen zur Erklärung der beobachteten Abweichungen keineswegs ausreichen, ergibt sich daraus, daß auch bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten, wo die Geschwindigkeitsverteilung ziemlich gleichmäßig ist, trotzdem große Abweichungen eintraten. Zur vollständigen Erklärung dieser Erscheinung muß noch die Wirkung der Massenträgheit herangezogen werden. Die Flüssigkeitsteilchen, die sich in der Ausflußröhre parallel zueinander bewegen, suchen infolge ihrer lebendigen Kraft beim Austritt aus der Ausflußröhre ihre Bewegungsrichtung beizubehalten. Daher röhren zum großen Teil die beträchtlichen Abweichungen. Sie werden um so größer sein, je größer einerseits die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen und andererseits die Richtungsänderung ist, die sie beim Austritt aus der Röhre erfahren. Da aber bei großer Ausflußgeschwindigkeit selbst ein Flüssigkeitsteilchen, das nahe am Rande der Ausflußöffnung austritt, nur wenig seine Bewegungsrichtung zu ändern braucht, so wird trotz seiner großen lebendigen Kraft die durch seine Trägheit bedingte Abweichung nur klein sein. Die beobachteten Abweichungen werden also bei großen Ausflußgeschwindigkeiten größtenteils von der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung herrühren. Betrachten wir dagegen ein entsprechendes Teilchen bei einem Strahl von sehr kleiner Ausflußgeschwindigkeit, so sehen wir, daß es seine Bewegungsrichtung um nahezu 90° ändern muß. Es ist daher klar, daß in diesem Falle selbst eine geringe lebendige Kraft der Flüssigkeitsteilchen genügt, um eine beträchtliche Vergrößerung des Strahlquerschnittes herbeizuführen. Wir haben also hier beim Ausfluß aus Röhren eine Erscheinung kennen gelernt, die geradezu das Gegenstück zur Contractio venae bildet, welche beim Ausfluß aus Öffnungen in dünnwandigen Gefäßen auftritt. Während in dem letzten Fall die von allen Seiten nach der Ausflußöffnung strömenden Flüssigkeitsteilchen je nach der Größe der lebendigen Kraft ihrer seitlichen, d. h. nach der Strahlachse gerichteten Bewegung eine mehr oder minder große Verkleinerung des Strahlquerschnittes bedingen, tritt beim Ausfluß aus Röhren infolge der gleichgerichteten Bewegung der Flüssigkeitsteilchen eine Querschnittsvergrößerung ein. Sie wird noch beträchtlich durch die Adhäsion an der Ausflußöffnung und die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten vergrößert.

Vielleicht röhrt auch ein Teil der Abweichungen von den größeren Werten der Kapillarkonstanten her, die Lenard¹⁾ bei frisch gebildeten Oberflächen an schwingenden Tropfen beobachtete. Es ist schade, daß die beträchtlichen Abweichungen in der Nähe der Ausflußöffnung es unmöglich machen, auf der Gestalt der Flüssigkeitsstrahlen eine Methode zur Bestimmung der Kapillarkonstanten zu gründen. Denn gerade auf diesem Wege war zu hoffen, der interessanten Frage nach dem Anfangswerte der Kapillarkonstanten und ihrer zeitlichen Abnahme auf den normalen Wert näher zu kommen.

Aber auch in größerer Entfernung von der Ausflußöffnung bestehen noch kleine Abweichungen, die wohl zum Teil von der inneren Reibung der Flüssigkeit herrühren. Auch dieser Strahlteil eignet sich zur Bestimmung der Kapillarkonstanten deswegen nicht, weil hier bereits Fehler von einem hundertstel Millimeter in der Messung des Strahldurchmessers ganz beträchtlich herausfallende Werte der Kapillarkonstanten hervorrufen.

C. Die Auflösung des Strahles in Tropfen.

In einer gewissen Entfernung, die von der Größe der Ausflußgeschwindigkeit und der Ausflußöffnung abhängt, ändert der Strahl plötzlich Gestalt und Aussehen. Während er in seinem oberen Teil vollständig klar und durchsichtig ist, ist er in dem unteren Teil trüb und unruhig. Anstatt daß sich sein Querschnitt immer mehr verkleinert, nimmt er hier periodisch zu und ab, bis sich der ganze Strahl in eine Reihe einzelner Tropfen auflöst. Durch die Methode der momentanen Beleuchtung hat Savart²⁾ und nach ihm Magnus³⁾ die Beschaffenheit dieses trüben Strahlteiles untersucht und festgestellt, daß er aus lauter einzelnen Tropfen besteht, die um ihre kugelförmige Gleichgewichtsgestalt Schwingungen ausführen. Den Grund für die Auflösung des Strahles sah man anfangs in der infolge der Schwerkraft mit der Entfernung von der Ausflußöffnung wachsenden Geschwindigkeit. Bei der Untersuchung des kontinuierlichen Strahlteiles bei momentaner Beleuchtung beob-

1) Lenard, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. 1910. 18. Abh.

2) Savart, Ann. d. Chim. et de Phys. 58. S. 337. 1833; Pogg. Ann. 33. S. 451. 1834.

3) Magnus, Pogg. Ann. 95. S. 1. 1855; 106. S. 1. 1859.

achtete Savart auf dem unteren Teil desselben abwechselnd Anschwellungen und Einschnürungen. Diese Erscheinung zeigt auch die dieser Arbeit beigelegte photographische Momentaufnahme Nr. 3, auf die ich erst später ausführlich eingehen werde. Die Ursache, warum diese Anschwellungen das Zerfallen des Strahles bewirken, erkannte Plateau¹⁾ in der Oberflächenspannung. Seine experimentellen Ergebnisse wurden von Hagen²⁾ und später von Lord Rayleigh³⁾ auf theoretischem Wege bestätigt. In seiner Abhandlung: „On the Instability of Jets“ zeigte Lord Rayleigh in volliger Übereinstimmung mit Plateaus Versuchen, daß unter Wirkung der Oberflächenspannung jede wellenartige Anschwelling, deren Länge größer als der Strahlumfang ist, die Abschnürung eines Tropfens herbeiführt, und ferner, daß sie dem Zerfall des Strahles am günstigsten ist, wenn sie $4\frac{1}{2}$ mal so groß wie der Durchmesser des Strahles an der Zerfallsstelle ist.

Zunächst suchte man die Entstehungsursache dieser Anschwellungen auf dem Flüssigkeitsstrahle in der Wirkung der Schwerkraft, dann in den von außen kommenden Erschütterungen, die fortwährend das Ausflußgefäß treffen. Wie Savart gezeigt hat, können diese Erschütterungen auch durch das Auffallen der Tropfen, in die der Strahl zerfällt, selbst bedingt werden. Andere Forscher dagegen suchten in den mannigfachen Bewegungen, die beim Ausfluß im Innern der Flüssigkeit selbst, im Ausflußgefäß sowohl wie im Strahl entstehen, den Ursprung der Störung. So sah Abendroth⁴⁾ in der Contractio venae beim Ausfluß aus dünnwändigen Öffnungen, in der Reibung an der Rohrwand beim Ausfluß aus Ansatzröhren, Lord Rayleigh im Auftreten von Wirbelbewegungen, die infolge der Unebenheiten des Gefäßbodens und der Röhre entstehen, die erste Ursache für die Störungswellen. Durch erschütterungsfreies Aufängen des Ausflußgefäßes suchte Lord Rayleigh vergeblich die Frage zu entscheiden, ob der Ursprung der Störungen außerhalb oder innerhalb der Flüssigkeit zu suchen wäre.

1) Plateau, Statique des Liquides; Ann. d. Chem. u. Pharm. 78. S. 157. 1851.

2) Hagen, Pogg. Ann. 80. S. 559. 1850.

3) Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. 10. S. 4. 1878.

4) Abendroth, Über elektrisierte Flüssigkeitssstrahlen. Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz, Dresden 1874.

Eine hier von völlig abweichende, aber an und für sich sehr originelle Ansicht entwickelte Buff¹⁾) in den Liebigschen Annalen. Die Beobachtung des Abtropfens aus einer Röhre zeigte ihm, daß immer nach dem Ablösen eines Tropfens der zurückbleibende zu einer Spitze ausgezogene Teil der Flüssigkeit infolge der Adhäsion und der Oberflächenspannung nach der Öffnung zurückgezogen wird und dann noch eine Anzahl Schwingungen ausführt. „Es scheint mir“, so führt Buff aus, „daß die Ablösung der Tropfen beim ausfließenden Strahl in ganz ähnlicher Weise vor sich geht. Nur muß, da die hinteren Wasserteilchen den vorderen fast mit der gleichen Geschwindigkeit folgen oder richtiger, da der Unterschied ihrer Geschwindigkeit nur allmählich zunimmt, eine längere Wassersäule ausgezogen werden, bis endlich das Gewicht des sich bildenden Tropfens den Zusammenhang überwiegt. Durch das vermöge der Kapillarkräfte bewirkte Zurückspringen der im Augenblick, da der Tropfen abreißt, zu einem dünnen Faden ausgezogenen Flüssigkeit gegen ihren nach oben hin dickeren Stamm werden dann die erwähnten wellenartigen Anschwellungen am unteren Ende des klaren Teiles und dadurch die Bildung und Ablösung eines 2. Tropfens usw. herbeigeführt.“ Wie man sich auch das Entstehen des ersten Tropfens denken mag — die Erklärung, wie das weitere Tropfenspiel durch ihn in Gang gebracht wird, ist in der Tat sehr einleuchtend. Um aber die Richtigkeit dieser Ansicht prüfen zu können, ist ein eingehendes Studium der Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen notwendig.

Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen.

Mathiessen und Ahrendt²⁾) haben sich zuerst mit Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen beschäftigt. Ihre Versuche beschränkten sich freilich auf jene Systeme stationärer Wellen, die dann entstehen, wenn man eine Spitze in nicht allzu großer Entfernung von der Ausflußöffnung in die Strahloberfläche eintauchen läßt. Dieses Wellensystem tritt aber auch dann auf, wenn der Strahl gegen einen festen Körper oder in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß fließt.

1) Buff, Ann d. Pharm. 78. S. 162. 1851.

2) Ahrendt, Rep. d. Phys. 24. S. 318. 1888.

Die Ahrendtschen Versuche wurden an horizontal ausfließenden Strahlen angestellt, weil auf dem horizontalen Teil derselben sich Wellen von gleicher Länge ausbilden. Die Versuche hatten die Aufgabe, das Thomsonsche Gesetz der Kapillarwellenbewegung experimentell zu prüfen. Nach dieser Theorie ist nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$(7) \quad v = \sqrt{\frac{2\pi a}{\lambda}},$$

worin a die Kapillarkonstante und λ die Wellenlänge bedeuten. Damit sich ein stationäres Wellensystem ausbilden kann, müssen die Wellen der Strömungsrichtung der Flüssigkeit entgegenlaufen und eine solche Länge besitzen, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Ausflußgeschwindigkeit ist. Nach dem Torricellischen Theorem ist dieselbe aber $v = \sqrt{2gh}$, in der h die Druckhöhe bedeutet. Aus der Vereinigung dieser Formel mit der Thomsonschen Gleichung erhält man folgende zwischen Wellenlänge und Druckhöhe bestehende Beziehung:

$$\lambda \cdot h = \frac{\pi a}{g} = \text{const.}$$

Um also die Richtigkeit des Thomsonschen Gesetzes zu prüfen, konnte sich Ahrendt darauf beschränken, die Konstanz des Produktes $\lambda \cdot h$ nachzuweisen und zu zeigen, daß diese Konstante den nach der Theorie sich ergebenden Wert $\pi a/g$ hat. Die Ahrendtschen Versuche bestätigen in der Tat annähernd die Konstanz von $\lambda \cdot h$. Allein die Konstante selbst ist bedeutend größer als der theoretische Wert 0,232. Nach den Versuchen hängt ihre Größe von der Entfernung der ein-tauchenden Spitze von der Ausflußöffnung ab und beträgt für den Abstand von 1 cm 0,528, von 2 cm 0,369 und von 3 cm 0,298. Die Erklärung dafür suchen Mathiessen und Ahrendt in der Verzögerung, welche die in der Mantelfläche befindlichen Teilchen durch Reibung und Adhäsion an der Wand des Ausflußrohres erleiden.

Allein ein großes Bedenken habe ich gegenüber dieser Arbeit, denn in ihr ist die Thomsonsche Theorie der Kapillarwellen, die nur für ebene Flüssigkeitsoberflächen bei unendlich großer Flüssigkeitstiefe abgeleitet ist, ohne weiteres auf Kapillarwellen auf zylinderförmigen Strahloberflächen übertragen, und

es ist in ihr die so nahe liegende Frage überhaupt nicht erörtert, ob bzw. wie weit das erlaubt ist.

Ableitung einer Gleichung für Kapillarwellen
auf Flüssigkeitsstrahlen.

Es handelt sich also für mich darum, eine der Thomsonischen Gleichung entsprechende Beziehung zu erhalten, die streng für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen gültig ist. Zu einer solchen Gleichung gelangt man, wenn man von Betrachtungen ausgeht, die Lord Rayleigh in seiner Abhandlung: „On the Instability of Jets“ anstellt. Hier behandelte er die unter Einfluß der Oberflächenspannung erfolgenden Schwingungen eines ruhenden Flüssigkeitszylinders. Streng gilt diese Ableitung aber nur für ringförmig den Strahl umschließende Wellen. Solche Wellen erhält man besonders schön, wenn man sie nicht durch eine in die Flüssigkeitsoberfläche eintauchende Spitze, sondern durch das Auftreffen des Strahles auf irgend ein Hindernis erzeugt. Wie ich schon oben andeutete, ist dieses so entstehende Wellensystem kein stehendes, sondern besteht aus stationären Wellen. Man muß sie nämlich als fortschreitende Wellen auffassen, die sich auf einem Medium fortpflanzen, das sich selbst mit der gleichen Geschwindigkeit aber in der entgegengesetzten Richtung bewegt. Um die mathematische Behandlung diesem Fall möglichst anpassen zu können, soll vorausgesetzt werden, daß sich Kapillarwellen auf einem Flüssigkeitszylinder fortpflanzen, der sich in entgegengesetzter Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit c bewegt. Die Zylinderachse wollen wir als z -Achse und zwei zu ihr und zueinander senkrecht stehende Richtungen als x - und y -Achse wählen.

Nehmen wir an, daß die Kapillarwellen in der positiven Richtung der z -Achse, der Flüssigkeitszylinder dagegen in der entgegengesetzten Richtung sich bewegt, so besitzt das für diese Flüssigkeitsbewegung geltende Geschwindigkeitspotential die Form:

$$\varphi = \psi \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + cz.$$

In dieser Gleichung ist φ eine Funktion von t bzw. von x und y , die noch so zu wählen ist, daß die Funktion der Kontinuitätsbedingung:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügt.

Dies ist aber dann der Fall, wenn ψ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \psi \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 0$$

ist. Als Lösung dieser partiellen Differentialgleichung erhält man:

$$\psi = \gamma \cdot J_0 \left(\frac{i 2\pi r}{\lambda} \right),$$

in der γ eine Konstante, r der Radius des Zylinders und $J_0(x)$ das Symbol für die Besselsche Funktion nullter Ordnung:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

bedeuten.

Das Geschwindigkeitspotential für die betrachtete Bewegung erhält somit die endgültige Gestalt:

$$\varphi = \gamma \cdot J_0 \left(\frac{2\pi i r}{\lambda} \right) \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) + c z.$$

Die Gleichung für die durch die Kapillarwellen deformede Zylinderoberfläche hat die Form:

$$r = a + \eta,$$

worin a der mittlere Radius und η eine Funktion von z und der Zeit t bedeuten. Die Störungsfunktion η erhält man aus der Beziehung:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[- \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] \text{ für } r = a \text{ zu: } \eta = - \gamma \frac{2\pi i}{\lambda} J_0' \left(\frac{2\pi i a}{\lambda} \right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{\lambda} z \right).$$

Um die Schwingungszahl $n = 2\pi/T$ zu erhalten, kann man nach einer Methode, die im Lehrbuch der Hydrodynamik von Lamb¹⁾ angegeben ist, von der Oberflächenbedingung:

$$p - p_0 = \alpha (1/R_1 + 1/R_2)$$

1) Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche Ausgabe von Dr. Friedel, B. G. Teubner, 1907, S. 551.

ausgehen, in der $p - p_0$ die Drucke zu beiden Seiten der Strahloberfläche und $1/R_1 + 1/R_2$ ihre mittlere Krümmung an der betrachteten Stelle bedeuten. Nach ihr ergibt sich für die Schwingungszahl n dieselbe Gleichung:

$$n^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{a}{\rho a^2} \cdot \frac{2\pi i a}{\lambda} \cdot \frac{J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)} \left[\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - 1 \right],$$

die Lord Rayleigh für die Schwingungen eines ruhenden Flüssigkeitszylinders auf einem anderen Wege erhalten hat.

Aus dieser Gleichung und der Beziehung $v = n \cdot \lambda$ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf zylindrischen Strahl-oberflächen:

$$(8) \quad v = \sqrt{\frac{i J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi a}{\rho \cdot \lambda}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß, wie auch zu erwarten war, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine sehr komplizierte Funktion des Zylindradius ist. Ihre rechte Seite ist ein Produkt aus drei Faktoren, von denen der zweite Faktor von dem Zylindradius völlig unabhängig und mit der rechten Seite der Thomsonschen Formel identisch ist. Da die ebene Flüssigkeitsoberfläche auch als Zylinderoberfläche von unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann, so muß die obige Gleichung für $a = \infty$ als Spezialfall die Thomsonsche Gleichung ergeben. Dies ist auch in der Tat der Fall, denn für $a = \infty$ nehmen die beiden übrigen Faktoren den Wert 1 an. Im ersten Faktor tritt sowohl im Zähler wie im Nenner des Bruches das Verhältnis des Zylinderumfanges zur Wellenlänge als Argument zweier Besselscher Funktionen, im 3. Faktor dagegen der reziproke Wert dieses Verhältnisses aber in einfacher Weise auf. Der Faktor

$$\sqrt{\frac{i \cdot J_0'}{J_0}}$$

ist immer ein echter Bruch, dessen Wert von 0 bis 1 wächst, während das Argument alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft.

Zur Berechnung dieses Ausdrückes wurden die Tafeln für Besselsche Funktionen von rein imaginärem Argument benutzt,

Argument x	$\frac{i \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}$	$\sqrt{\frac{i \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}}$
0,0	0,0000	0,0000
1,0	0,4464	0,6681
2,0	0,6978	0,8353
3,0	0,8100	0,9000
3,6	0,8462	0,9199
4,0	0,8636	0,9293
4,6	0,8832	0,9398
5,0	0,8934	0,9452
5,6	0,9056	0,9517
6,0	0,9124	0,9552
7,0	0,9255	0,9620
8,0	0,9352	0,9671
9,0	0,9428	0,9710
10,0	0,9486	0,9740
11,0	0,9534	0,9764
.	.	.
∞	1,0000	1,0000

die in den Jahnke-Emdeschen¹⁾ Funktionentafeln zusammengestellt sind. Auch der 3. Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}}$$

ist für alle Werte von $\lambda < 2\pi a$ kleiner als 1. Wir sehen somit, daß für alle diese Wellenlängen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kapillarwellen auf Strahloberflächen kleiner ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für entsprechend lange Wellen auf ebenen Flüssigkeitsoberflächen. Und zwar ist der Unterschied der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten um so größer, je kleiner das Verhältnis $\frac{2\pi a}{\lambda}$ ist.

Für die Wellenlänge λ , die gleich dem Strahlumfang ist, wird der 3. Faktor Null, in diesem Falle ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = 0$ und zwar ganz unabhängig von der Natur, d. h. der Dichte und der Kapillarkonstanten der Flüssigkeit.

Für alle Wellenlängen aber, welche größer als der Strahlumfang sind, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär. Wir haben es also hier nicht mehr mit richtigen Wellen zu

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven.
B. G. Teubner 1909.

tun, da sie keine eigene Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, sondern mit wellenartigen Gebilden, denen die Flüssigkeitsströmung als Transportmittel dient. Sie sind es, die nach der Lord Rayleighschen Theorie das Zerfallen des Strahles in Tropfen bewirken.

Die Ahrendtschen Versuche von diesem Ergebnis aus betrachtet.

Durch Kombination des Thomsonschen Gesetzes mit der Torricellischen Formel erhielt man, wie ich oben ausführlich zeigte, die Beziehung:

$$\lambda \cdot h = \frac{a \cdot \pi}{\varrho \cdot g} = \text{const.}$$

die Ahrendt seinen Versuchen zugrunde legte. Benutzt man aber an Stelle des Thomsonschen Gesetzes die oben nach der Lord Rayleighschen Theorie über Strahlschwingungen abgeleitete Gleichung, so findet man, daß das Produkt $\lambda \cdot h$ keineswegs eine Konstante, sondern eine Funktion der Wellenlänge und des Strahlradius ist:

$$\lambda \cdot h = \frac{i J_0' \left(\frac{2\pi i a}{\lambda} \right)}{J_0 \left(\frac{2\pi i a}{\lambda} \right)} \cdot \frac{a \pi}{\varrho \cdot g} \left(1 - \frac{\lambda^2}{4 \pi^2 a^2} \right).$$

Nur sobald die Wellenlänge klein gegenüber dem Strahlumfang ist, ist die rechte Seite nicht wesentlich kleiner als die Konstante

$$\frac{a \cdot \pi}{\varrho \cdot g}.$$

Da in der Tat bei den Versuchen von Ahrendt diese Forderung annähernd erfüllt ist (von 25 Angaben ist bei 20 Angaben die Wellenlänge kleiner als der zehnte Teil des Strahlumfanges), so erklärt es sich, daß seine Versuche eine annähernde Konstanz von $\lambda \cdot h$ wenigstens für jede bestimmte Entfernung von der Ausflußöffnung ergeben haben. Wenn man aber die einzelnen Werte, die Ahrendt für dieses Produkt bei einer bestimmten Entfernung gefunden hat, untereinander vergleicht, so sieht man, wie sehr doch die Werte schwanken und wie bedeutend die äußersten Werte z. B. für den Abstand von 1 cm von der Ausflußöffnung 0,490 und 0,550 von dem Mittelwert 0,528 für diese Entfernung abweichen. Diese Schwankung röhrt

aber vor allem von den Ungenauigkeiten her, die die Messung der Wellenlänge am Strahle selbst mit sich bringt. Eine genauere Messung derselben hätte sicherlich auch bei den Ahrendtschen Versuchen schon eine, wenn auch geringe Abnahme des Produktes mit wachsender Wellenlänge ergeben müssen, von der aber bei seinen Resultaten nicht die geringste Andeutung zu erkennen ist.

Experimentelle Untersuchung des Gesetzes.

Um schöne ringförmige Kapillarwellen zu erhalten, ließ ich den Strahl gegen ein Hindernis fließen. Diese Erzeugungsweise läßt sich aber nur mit Vorteil bei dem vertikal nach unten fließenden Strahl verwenden. Beim horizontal ausfließenden Strahle stört die von dem Hindernis abfließende Flüssigkeit meist den Strahl selbst und deformiert mehr oder weniger das entstehende Wellensystem. Andererseits gleicht sich auch die Verzögerung, die die Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche in der Nähe der Ausflußöffnung besitzen, bei dem fallenden Strahl bedeutend schneller aus als bei dem horizontal ausfließenden. Diese beiden Umstände veranlaßten mich, die Versuche an dem fallenden Strahl vorzunehmen, trotzdem ich hier die verschiedenen Längen der einzelnen Wellen mit in Kauf nehmen mußte. Als Hindernis konnte in diesem Falle der Spiegel eines mit Wasser gefüllten Gefäßes dienen. Die Messung der Wellenlänge und der Strahldicke wurden wieder mit dem Kathetometer, aber nicht direkt am Strahle selbst, sondern an der photographischen Momentaufnahme vorgenommen. Die Aufnahme erfolgte ganz in derselben Weise, wie bei der Untersuchung der Strahlform. Nur wurde diesmal ausschließlich als Lichtquelle der zwischen zwei Zinkelektroden übergehende Funke einiger Leidner Flaschen benutzt. Daher konnte die bei längerer Belichtung sehr störende Unschärfe des Bildes, welche durch das unvermeidliche Zittern und Hinundherschwanken des Wellensystems hervorgerufen wird, gänzlich beseitigt werden. Auf jeder photographischen Platte wurden zwei zusammengehörige Aufnahmen gemacht. Zuerst wurde der Strahl mit und unmittelbar darauf ohne Wellensystem aufgenommen (vgl. Fig. 2 und 1).

Die zweite Aufnahme diente zur Geschwindigkeitsbestimmung an den verschiedenen Strahlstellen. Die Geschwindig-

keit wurde nämlich aus der Ausflußmenge und dem an der zweiten Aufnahme gemessenen Strahldurchmesser (bzw. dem daraus berechneten Strahlquerschnitt) an der betrachteten Stelle bestimmt. Dieser Strahldurchmesser stimmte im großen Ganzen mit dem arithmetischen Mittel aus den Durchmessern des durch die Wellen deformierten Strahles für die betrachtete Welle überein. Abweichungen traten nur bei der ersten bzw. auch hier und da bei der zweiten Welle vom Hindernis aus gerechnet ein, die, wie schon Ahrendt bemerkte, länger sind, als sie im Vergleich mit den übrigen sein sollten. Sie wurden daher bei den Messungen fortgelassen. Die Zahl der Wellen, die auf einmal gemessen werden konnte, richtete sich nach der Wellenlänge. Bei den kleinsten Wellen konnten 4 bis 5 Wellen zur Bestimmung der mittleren Wellenlänge, bei den größten dagegen nur eine benutzt werden. In dem letzten Falle wurde die Wellenlänge aus dem arithmetischen Mittel aus 5 verschiedenen Messungen bestimmt.

Die Versuchsergebnisse habe ich in folgender Tabelle wiedergegeben. In der ersten Spalte befindet sich die Wellenlänge λ , in der zweiten der mittlere Radius des Strahles der betreffenden Stelle, an der sich die Welle ausbildet. In der dritten Spalte habe ich das Verhältnis des Strahlumfangs zur Wellenlänge angegeben. Die vierte Spalte enthält die nach der Thomsonschen Gleichung aus der Kapillarkonstanten und der Wellenlänge berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_p der Kapillarwelle, die fünfte, die nach der oben abgeleiteten Gleichung aus den eben angeführten beiden Größen und dem Strahlradius berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v . In der sechsten Spalte endlich steht die aus der Ausflußmenge und dem betreffenden Strahlquerschnitt



Fig. 1.



Fig. 2.

sich ergebende mittlere Geschwindigkeit v_m . Da die Verzögerung der Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche sich bei dem fallenden Strahl sehr schnell ausgleicht und die Wellen in hinreichender Entfernung von der Ausflußöffnung entstehen, so weicht die so bestimmte mittlere Geschwindigkeit nicht wesentlich von der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche ab.

Ein Vergleich der drei letzten Spalten der folgenden Tabelle zeigt uns, um wieviel besser die Fortpflanzungs-

Wellenlänge λ gemessen em	Strahlradius a gemessen cm	$\frac{2\pi a}{\lambda}$ berechnet	Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Thomson v_p berechnet cm/sec	Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Gleichung (8) v berechnet cm/sec	Mittlere Geschwindigkeit v_m gemessen cm/sec
0,074	0,1767	15,00	79,21	77,43	77,07
0,077	0,070	5,71	77,65	72,83	71,40
0,083	0,071	5,37	74,79	69,75	69,46
0,107	0,079	4,64	65,87	60,48	60,89
0,116	0,0855	4,63	63,26	58,08	57,22
0,121	0,1215	6,31	61,93	58,55	58,84
0,129	0,123	5,99	59,99	56,49	56,12
0,131	0,0878	4,21	59,53	53,85	53,33
0,138	0,1245	5,67	58,00	54,37	54,05
0,143	0,090	3,95	56,98	51,16	50,82
0,173	0,095	3,45	51,80	45,36	45,61
0,194	0,2275	7,37	48,02	46,72	46,50
0,202	0,1395	4,34	47,84	43,63	43,62
0,2285	0,127	3,49	45,08	39,57	39,51
0,234	0,2395	6,43	44,54	42,16	41,95
0,243	0,148	3,83	43,71	39,04	38,92
0,388	0,150	2,43	34,59	27,21	28,30

geschwindigkeit, welche nach der für die Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen geltenden Formel berechnet worden ist, mit der mittleren Geschwindigkeit an der betreffenden Strahlstelle übereinstimmt, als die nach dem Thomsoschen Gesetz berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Zugleich bestätigt die Tabelle, daß die Abweichungen von dem Thomsoschen Gesetz um so bedeutender werden, je größer die Wellenlänge verglichen mit dem Strahlumfange ist, d. h. je kleiner das Verhältnis $2\pi r/\lambda$ ist. Leider ist es mir nicht ge-

lungen, auf dem fallenden Strahl Wellen zu erhalten, für die das Verhältnis kleiner als 2,43 ist.

Damit nämlich das Verhältnis $2\pi a/\lambda$ so klein wie möglich wird, muß man den Strahlradius möglichst klein und die Wellenlänge möglichst groß machen. Jenes erreicht man dadurch, daß man den Durchmesser der Ausflußröhre sehr klein wählt, dieses durch Anwenden einer möglichst kleinen Ausflußgeschwindigkeit und durch Heranrücken des Wellensystems an die Ausflußöffnung. Bei der Ausführung treten aber eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die in verschiedenen Umständen ihren Grund haben. Einmal muß die Ausflußgeschwindigkeit, bei der gerade noch ein Strahl und nicht ein Abtropfen entsteht, um so größer sein, je kleiner der Durchmesser der Ausflußröhre wird. Ferner verkleinert sich bei dem fallenden Strahl der Querschnitt in der Nähe der Ausflußöffnung, wo die Geschwindigkeit noch klein ist, so stark, daß dieser Strahlteil auch nicht annähernd als zylindrisch angesehen werden kann. Es gilt daher für Wellen, die auf diesem Strahlteil entstehen, nicht mehr streng die obige Formel. Andererseits ist auch die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit und ferner die Messung der Wellenlänge sehr ungenau, da die Wellen in diesem Strahlstück nicht mehr sehr scharf ausgeprägt sind. Diese Ungenauigkeit zeigt sich auch schon bei der letzten Angabe der Tabelle, wo das Verhältnis $2\pi a/\lambda = 2,43$ ist.

Bis zu einem gewissen Grade geben diese experimentell gefundenen Resultate auch eine Bestätigung für die Richtigkeit der Lord Rayleighschen Theorie über die Instabilität der Flüssigkeitsstrahlen.

Anwendung dieser Ergebnisse auf die Buffsche Ansicht des Strahlzerfalls.

Nach der Buffschen Ansicht röhren die auf dem unteren Teil des kontinuierlichen Strahlstückes auftretenden wellenartigen Anschwellungen, welche bei Funkenlicht sichtbar werden und das Zerfallen des Strahles bewirken, von den Schwingungen des Strahlendes her, die durch den zuletzt abgerissenen Tropfen veranlaßt werden.

Wellen, die sich von der Auflösungsstelle aus auf dem fallenden Strahle gegen die Flüssigkeitsströmung nach oben bewegen können, müssen eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

haben, die größer ist als die Strömungsgeschwindigkeit daselbst. Ihre Länge muß also kleiner sein als die der stationären Wellen in der Nähe der Auflösungsstelle. Alle Wellen, deren Wellenlänge größer ist als die der stationären, können gegen die Flüssigkeitsbewegung sich nicht fortpflanzen, sondern werden von ihr mitgenommen. Da die stationären Wellen in der Nähe der betrachteten Stelle bereits mikroskopisch klein sind, können die langen wellenartigen Anschwellungen, die Savart auf dem unteren Strahlstück beobachtete, nicht von den Schwingungen des Strahlendes herrühren. Daß aber kleinere Wellen auf diese Weise zustande kommen können, zeigt die photographische



Fig. 3.

Momentaufnahme Fig. 3. Die hierbei verwendete Anordnung unterschied sich von den früher benutzten nur dadurch, daß die photographische Platte, welche an einem Pendel befestigt war, während eines Funkens sich hinter dem Strahle vorbeibewegte. Dadurch wurde eine kinematographische Aufnahme des Auflösungsvorganges erzielt. Bei dem beigefügten Photogramm folgen die einzelnen Aufnahmen zeitlich von links nach rechts aufeinander. Sie zeigen uns auf dem kontinuierlichen Strahlteile die Savartschen Anschwellungen, die von oben nach unten, d. h. mit zunehmender Entfernung von der Ausflußöffnung immer dicker werden. Diese Dickenzunahme erfolgt, wie man aus drei aufeinander folgenden Aufnahmen deutlich erkennt, sehr rasch, besonders wenn man bedenkt, daß

der ganzen Gruppe von Aufnahmen eine Zeitdauer von nicht ganz einer zehntel Sekunde entspricht. Zwei aufeinander folgende Anschwellungen sind durch einen dünnen Flüssigkeitsfaden miteinander verbunden, den Savart als Einschnürung bezeichnet hat. Sobald eine Anschwellung eine bestimmte Größe erlangt hat, löst sie sich in Form eines Tropfens vom Strahle los. Dabei wird der zurückbleibende dünne Flüssigkeitsfaden zu einer feinen Spitze ausgezogen, die dann nach Buff eine Anzahl von Schwingungen ausführt. Dies erkennt man an den Kapillarwellen, mit denen sich dieser Strahlteil in den folgenden Aufnahmen bedeckt hat. Diese Wellen aber führen nicht, wie Buff meinte, das Abreißen des folgenden Tropfens herbei. Das besorgt vielmehr die nächste Anschwellung, welche auf den vorhergehenden Aufnahmen strahlaufwärts bereits erkennbar ist und die mit den Schwingungen des Strahles gar nichts zu tun hat. Gleichzeitig mit dem Lostrennen von dem Flüssigkeitsstrahl löst sie sich auch von den zuletzt betrachteten, mit Wellen bedeckten Flüssigkeitsfaden. Aus der Anschwellung wird ein um seine kugelförmige Gleichgewichtsgestalt schwingender Tropfen. Aus dem Flüssigkeitsfaden entsteht ein einer Perlenkette ähnliches Gebilde, das nach einer Anzahl eigentümlicher Gestaltveränderungen oft in zwei Tropfen zerfällt.

Diese Beobachtungen stimmen auch mit den oben angestellten theoretischen Erwägungen überein. Die Anschwellungen haben, da ihre Länge größer als der Strahlumfang ist, keine eigene Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sondern müssen die Strömung selbst als Transportmittel benutzen. Daraus folgt aber, daß sie nicht, wie Buff annahm, durch die Schwingungen des Strahlendes hervorgerufen, sondern von der Ausflußöffnung her von dem Flüssigkeitsstrahl mitgenommen werden.

(Eingegangen 1. Juni 1919.)

*3. Über die Änderung der Thermokraft
und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-
Natriumlegierung beim Übergang vom festen in
den flüssigen Aggregatzustand;
von K. Siebel.*

I. Einleitung.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde durch Untersuchungen an einer Reihe von reinen Metallen und Legierungen die lange umstrittene Frage nach dem thermoelektrischen Verhalten der Metalle beim Schmelzen für die untersuchten Metalle dahin entschieden, daß ohne Ausnahme beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand und umgekehrt eine, wenn auch oft sehr kleine, mehr oder minder sprunghafte Änderung in der Thermospannung auftritt. Es ergab sich, daß diese Unregelmäßigkeiten in drei verschiedene Erscheinungen zerfielen. Trägt man die gemessenen Thermospannungen als Ordinaten und die zugehörigen Temperaturen der variablen Lötstelle des Thermokreises als Abszissen auf, so zeigten sich bei der so hergestellten Thermokurve:

1. In der Umgebung der Temperatur des Schmelzpunktes unstetig zwischen großen und kleinen Werten schwankende Spannungen. Der so entstehende Teil des Kurvenbildes wurde in der früheren Arbeit als „allgemeine Schmelzgebietsfigur“ bezeichnet. Dieselbe ist nur eine Folge der beim Wechsel des Aggregatzustandes auftretenden latenten Wärmemengen.

2. Eine Richtungsänderung der Thermokurven am Schmelzpunkte, die sich aber so allmählich vollzieht, daß der Kurvenverlauf stetig zu bleiben scheint.

3. Eine mehr oder minder plötzliche Parallelverschiebung des einen Astes der Thermokurve (wenn man die Ordinate der Spannung am Schmelzpunkte als Trennungslinie der beiden

1) K. Siebel, Dissertation Kiel 1914 und Ann. d. Phys. (4) 45. S. 839. 1914.

Äste betrachtet). Meist ist mit dieser Parallelverschiebung auch noch eine Richtungsänderung verbunden.

Die beiden letzten Erscheinungen sind rein thermoelektrischer Natur. Die nähere Diskussion derselben führte zu dem Resultate, daß im Augenblick des Schmelzens eines Metalles zu der bereits vorhandenen Thermospannung gegen das Vergleichsmetall zwischen noch festem und bereits geschmolzenem Metall eine thermoelektrische Zusatzspannung auftritt, die durchweg vom flüssigen zum festen Teil des Metalles gerichtet ist. Auch wurde damals schon mit Hilfe einer von A. Bernoulli¹⁾ abgeleiteten Formel diese hypothetische Zusatzspannung berechnet und mit den gemessenen Größen in verhältnismäßig guter Übereinstimmung gefunden. Nach dem betreffenden elektronentheoretischen Ausdruck in der von mir auf feste und flüssige Phase eines Metalles angewandten Form:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{R}{2F} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right),$$

wo R die Gaskonstante $= 8,916 \cdot 10^7$ Erg/Grad, F die Ladung eines Mols $= 9647$ elektromagn. Einh. und V_1 und V_2 die Atomvolumina der beiden im Thermokreis verbundenen Metalle bedeuten, ergibt sich diese Zusatzspannung als Folge der plötzlichen Änderung des Atomvolumens im Augenblicke des Schmelzens der Metalle. Das Zustandekommen jener Spannung wurde also in Verbindung gebracht mit der am Schmelzpunkte eintretenden sprunghaften Volumänderung. Wie J. Koenigsberger²⁾ wohl mit Recht bemerkt, ist allerdings die Anwendung jener aus quantentheoretischen Überlegungen abgeleiteten Formel auf ein flüssiges Metall nicht einwandfrei. Am Schluß dieser Arbeit wird gezeigt werden, wie dasselbe Resultat auch ohne Benutzung der Bernoullischen Formel zwanglos herauskommt.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen an einer Kalium-Natriumlegierung war einmal der, die oben geschilderten früheren Ergebnisse nochmals zu prüfen, vor allem aber sollte durch eine an demselben Metallmaterial vorgenommene Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit die hierbei zu erwartende sprunghafte Änderung beim Wechsel des Aggregat-

1) A. L. Bernouilli, *Verh. d. Deutsch. Physikal. Ges.* **18**, S. 573. 1911.

2) J. Koenigsberger, *Ann. d. Phys.* **47**, S. 563. 1915.

zustandes in Vergleich gesetzt werden zu der der Thermokraft. Schließlich noch sollte versucht werden, aus der durch die Untersuchungen von Hagen¹⁾ bekannten Volumänderung beim Schmelzen der Kalium-Natriumlegierung Schlüsse zu ziehen über einen vermuteten Zusammenhang zwischen sprunghafter Volumänderung beim Schmelzen bzw. Erstarren eines Metalles einerseits und sprunghafter Änderung der Thermokraft und Leitfähigkeit beim Wechsel des Aggregatzustandes andererseits.

Benutzt wurde die äußerst interessante Kalium-Natriumlegierung, die die beiden Komponenten Kalium und Natrium in atomarem Verhältnis 39:23 enthält. Hagen findet für diese äußerlich ganz quecksilberähnliche Legierung, die bei Zimmertemperatur flüssig ist, einen Schmelzpunkt von +4,5° C und ein spezifisches Gewicht des flüssigen Metalles bei der Schmelztemperatur von 0,8905 und für das feste Metall bei 0° von 0,8994. Nach dem Vorgang von Hagen wurde die Legierung derart hergestellt, daß die gut von anhaftendem Petroleum gereinigten, genau abgewogenen Stücke Kalium und Natrium schnell in einen Kolben gebracht wurden, der darauf evakuiert und zugeschmolzen wurde. Durch langsames Erwärmen wurden die Komponenten zusammengeschmolzen; durch Überfließenlassen der abgekühlten Legierung in einen an den ersten angeblasenen Kolben wurde das Metall von den Schlacken gereinigt, die vollständig im ersten Kolben zurückblieben.

Ungemein schwierig war es, eine Legierung von genau der vorgeschriebenen Zusammensetzung herzustellen, da bei der beschriebenen Art der Bereitung das nicht mehr von Petroleum geschützte Metall immerhin einige Zeit hindurch in Berührung mit der Luft stand, wobei besonders das Kalium angegriffen wurde.²⁾ Man tut deshalb bei der Herstellung der Legierung gut, von vornherein etwas mehr Kalium zu nehmen, als vorgeschrieben. Genau die atomare Zusammensetzung zu treffen, ist also ziemlich vom Zufall abhängig. Da es bei der vorliegenden Arbeit hauptsächlich nur darauf ankam, die betreffenden Messungen an ein und derselben Legierung vorzunehmen, wurde nach verschiedenen Versuchen

1) Hagen, Ann. d. Phys. 19. S. 436. 1883.

2) Nach H. Hörig, Ann. d. Phys. 28. S. 371. 1909, kann die fertige Legierung von Merck, Darmstadt, bezogen werden.

eine Komposition gewählt, die als Resultat einer Reihe von Bestimmungen des „Haltpunktes“ mittels genau geeichter Kupfer-Konstantan-Thermoelemente einen Schmelzpunkt von $+6,5^{\circ}\text{C}$ ergab, also 2°C höher als bei der von Hagen benutzten Legierung. Da sehr geringe Änderungen in der Zusammensetzung den Schmelzpunkt erheblich beeinflussen, so kann die Zusammensetzung meiner Legierung nur sehr wenig von der Hagenschen abweichen. Einige nach Beendigung der eigentlichen Messungen angestellten Bestimmungen des spezifischen Gewichts durch Auswägen kleiner Mengen der Legierung, die unter Petroleumsschutz in enge, kalibrierte Glasröhrechen hineingesogen wurde, ergaben im Mittel bei 18° ein spezifisches Gewicht von 0,8880, d. h. eine Zahl, die nur einen Unterschied von 0,0009 gegen die Hagensche aufweist. Denn aus der bei $+4,5^{\circ}$ gegebenen Dichte = 0,8905 und dem ebenfalls gegebenen kubischen Ausdehnungskoeffizienten der flüssigen Legierung = 0,0002861 ergibt sich die Dichte der Hagenschen Legierung bei 18°C zu 0,8871. Auch hieraus ergibt sich also, daß die Abweichung in der Zusammensetzung zwischen der Hagenschen und der von mir untersuchten Legierung nur geringfügig ist.

II. Messung der Thermospannung zwischen (Kalium-Natrium) und Konstantan und Bestimmung des spezifischen elektrischen Widerstandes.

Versuchsanordnung.

Die zweckmäßige Konstruktion des Gefäßes, das das zu untersuchende Metall aufnehmen sollte, bot große Schwierigkeiten. Wie verschiedene Versuche ergaben, war vor allem für möglichste Beseitigung aller Sauerstoff- und Feuchtigkeitsspuren zu sorgen und auch jede Berührung des Metalles mit Hahnfett zu vermeiden; sonst überzog sich das Metall sofort mit einer Haut, und während es sonst in Kugeln von oft 1 cm Durchmesser zusammenfloß, haftete es jetzt an den Wänden der Glasgefäße und gab in Berührung mit anderen Metallen sehr schlechten Kontakt. Auch erschien eine Untersuchung bei Bedeckung mit Petroleum oder ähnlichen Stoffen nicht zweckmäßig, da bei Erschütterungen ein Abspalten von kleinen Metallkügelchen und ein Vermischen derselben mit Petroleum wegen des geringen Dichteunterschiedes nicht zu vermeiden

Thermoelemente an die Enden von K konnte ein Siemens-Drehspulgalvanometer mit 100Ω Vorschaltwiderstand gelegt werden, das so als Voltmeter diente. Nach dieser Methode konnte eine Änderung des Widerstandes von $10^{-5} \Omega$ noch genau gemessen werden. Das ganze Gefäß K wurde in ein Petroleumbad getaucht, das durch Kohlendioxyd und Äther auf etwa $-70^\circ C$ abgekühlt wurde. Da die dann beginnende Wiedererwärmung des Bades durch geeigneten Wärmeschutz sehr verzögert wurde (Dauer der Erwärmung um 1° war etwa 7 Minuten), so konnte die Badtemperatur mit der des Metalles als übereinstimmend angenommen werden. Durch dauerndes Rühren wurde für gleichmäßige Temperaturverteilung gesorgt. Die Temperatur wurde durch ein Normal-Pentanthermometer gemessen.

Ergebnisse und Folgerungen.

Die Ergebnisse der Messungen sind in den beiden folgenden Tabellen I und II zusammengestellt. Die beiden Kurven geben ein deutliches Bild von dem Verhalten der Thermospannung und des elektrischen Widerstandes in der Umgebung der Schmelztemperatur der untersuchten Legierung.

Tabelle I.

Thermospannung von K/Na gegen Konstantan zwischen -40° und $+40^\circ C$. Temperatur der konstanten Lötstelle $-37,9^\circ C$.

Variabile Lötstelle $^\circ C$	Thermospannung in 10^{-6} Volt	Variabile Lötstelle $^\circ C$	Thermospannung in 10^{-6} Volt
- 39,7	2709	- 6,5	1480
- 34,5	2510	- 4,4	1430
- 25,9	2200	- 2,3	1380
- 25,3	2180	- 1,7	1348
- 23,4	2110	- 0,5	1324
- 22,4	2070	- 0,4	1300
- 20,2	1986	+ 1,6	1260
- 19,1	1938	+ 2,7	1224
- 17,4	1878	+ 3,1	1192
- 15,7	1818	+ 3,3	1178
- 14,9	1778	+ 3,8	1160
- 13,5	1740	+ 4,5	1140
- 12,3	1700	+ 5,2	1122
- 11,7	1664	+ 5,2	1106
- 10,6	1632	+ 5,3	1092
- 9,4	1580	+ 5,3	1080
- 7,1	1520	+ 5,5	1064

Tabelle I (Fortsetzung).

Variable Lötstelle °C	Thermospannung in 10^{-6} Volt	Variable Lötstelle °C	Thermospannung in 10^{-6} Volt
+ 5,7	1054	+ 19,7	660
+ 6,4	1038	+ 22,2	575
+ 7,4	1022	+ 22,2	575
+ 8,0	1004	+ 23,4	520
+ 9,9	982	+ 24,8	470
+ 10,6	938	+ 28,7	336
+ 12,3	882	+ 29,7	284
+ 13,3	854	+ 32,0	220
+ 14,0	838	+ 33,7	150
+ 15,1	800	+ 38,0	0
+ 16,9	761	+ 38,0	0
+ 17,6	720		

Tabelle II.

Elektrischer Widerstand von K/Na zwischen - 60° C und + 40° C
Widerstandskapazität = 172,84 cm⁻¹.

°C	W . 10 ⁻⁵	$\sigma . 10^{-6}$	°C	W . 10 ⁻⁵	$\sigma . 10^{-6}$
- 59	174	10,3	+ 6	432	25,0
- 56	184	10,6	+ 6	432	25,0
- 54	187	10,8	+ 6,5	448	26,0
- 53	185	10,7	+ 7	470	27,2
- 50	195	11,3	+ 7	472	27,3
- 48	197	11,4	+ 8	549	31,8
- 44	200	11,6	+ 8	565	32,7
- 42	206	11,9	+ 8,5	681	39,4
- 40	207	11,98	+ 9	699	40,4
- 37	214	12,4	+ 9,5	705	40,8
- 35	217	12,6	+ 10	707	40,9
- 30	225	13,0	+ 10	707	40,9
- 25	235	13,6	+ 11	709	40,1
- 20	243	14,1	+ 12	715	41,4
- 18	245	14,2	+ 14	715	41,4
- 15	255	14,8	+ 15	723	41,8
- 10	270	15,6	+ 15	723	41,8
- 9	274	15,9	+ 18	726	42,0
- 7	329	19,0	+ 20	726	42,0
- 6	326	18,9	+ 20	726	42,0
- 5	337	19,5	+ 25	727	42,1
- 2	348	20,1	+ 25	727	42,1
- 0	355	20,5	+ 30	737	42,6
+ 2	370	21,4	+ 30	737	42,6
+ 3	381	22,0	+ 35	746	43,2
+ 4	388	22,5	+ 35	744	43,1
+ 4	388	22,5	+ 40	748	43,3
+ 5	408	23,6	+ 40	748	43,3
+ 5	405	23,4			

1. Die Thermospannung:

Von -40° bis -10° verläuft die Thermospannungskurve fast völlig gradlinig mit einer Neigung, die durch $\frac{dE}{dT} = 97 \cdot 10^{-8} \text{ V}$ gegeben ist. Bei -10° beginnt die Kurve flacher zu werden. Bei -8° tritt die „Schmelzgebietstigr“ auf mit drei scharfen Knicken. Am Schmelzpunkte selbst tritt ein ziemlich plötzlicher Abfall von etwa $70 \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$ auf, der aber wohl noch als Teil der Schmelzgebietsfigur zu betrachten ist. Nach Überwindung dieser Unstetigkeiten geht die Kurve allmählich wieder in ungefähr die alte Richtung über und hat von -18° ab wieder geradlinigen Verlauf mit einem $dE/dT = 35,3 \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$. Wie nach meinen früheren Erfahrungen zu erwarten war, hat also die sehr weiche und unkristalline Legierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand nur die unbedeutende Verkleinerung der Thermokraft von $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$ erlitten. Außerdem hat der Kurvenast für das flüssige Metall, wie aus Vergleich mit dem punktiert über das Schmelzgebiet hinaus fortgesetzten Ast für das feste Metall zu erkennen ist, eine Parallelverschiebung von etwa $142 \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$ nach oben erlitten. Der Thermostrom fließt an der warmen Lötstelle vom Konstantan zum Kalium-Natrium. Besteht auch bei Kalium-Natrium zwischen festem und flüssigem Metall der oben erwähnte thermoelektrische Zusatzstrom, so müßte also bei den tiefen Temperaturen der variablen Lötstelle unterhalb von $-6,5^{\circ}$ dieser Strom in gleicher Richtung wie der Hauptstrom fließen, also diesen verstärken. Im Augenblicke der Verflüssigung der ganzen Metallmasse hört die Zusatzspannung auf, d. h. dE/dT ist jetzt um den Betrag der Thermokraft zwischen fester und flüssiger Phase verkleinert. Die Parallelverschiebung der beiden Kurvenäste erklärt sich dann zwangslös daraus, daß der Schmelzvorgang sich über das ganze Gebiet von -10° bis $+18^{\circ}$ erstreckt und daher schon vom Beginn dieses Intervales an mit langsam abnehmenden dE/dT zu rechnen ist. Durch das kleiner werdende dE/dT wird bewirkt, daß in gleichen Temperaturintervallen die Spannung weniger stark abfällt, als sonst bei einem größeren dE/dT zu erwarten wäre, d. h. die Spannungskurve zeigt für Temperaturen oberhalb des Schmelzpunktes höhere Werte als bei konstantem dE/dT zu erwarten gewesen wäre.

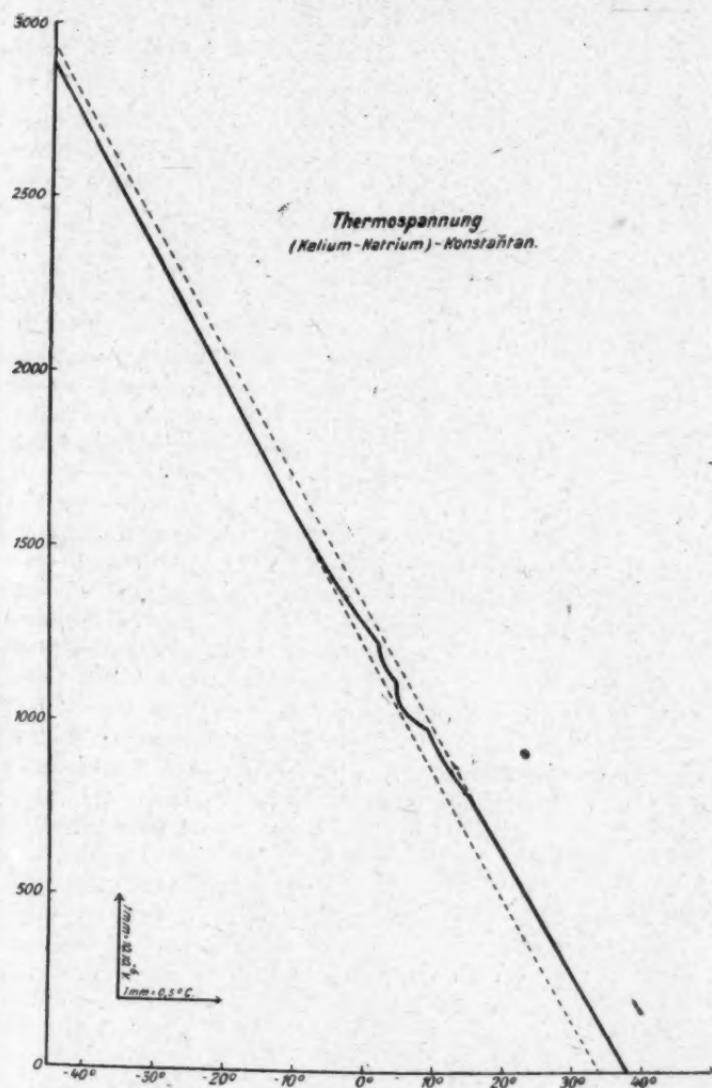


Fig. 2.

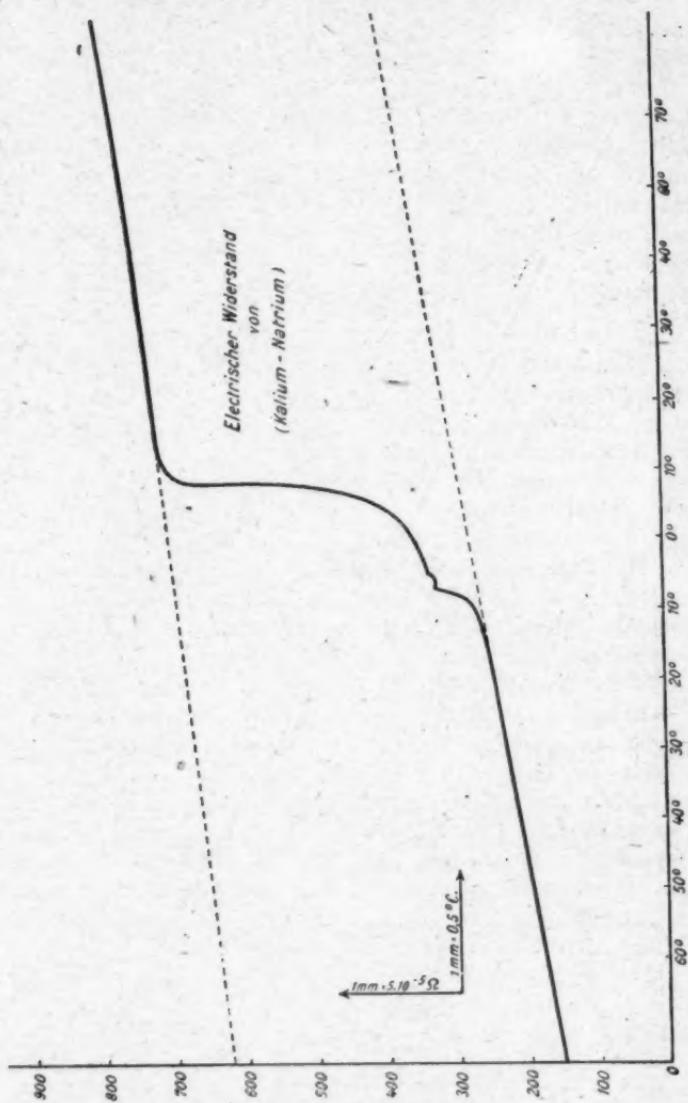


Fig. 8.

Aus den Beobachtungen folgt also, daß auch bei der benutzten Kalium-Natriumlegierung eine vom flüssigen zum festen Teil gerichtete Thermokraft besteht.

Zu erwähnen ist noch die Beobachtung Hagens, daß die Legierung sich leicht unterkühlen läßt und zwar bis -10° , d. h. bis zu dem Punkte, bis zu dem nach meinen Beobachtungen die Wirkung des Schmelzvorganges sich erstreckt. Auch fand Hagen, daß die Legierung bereits beträchtlich unterhalb der Schmelztemperatur anfängt, eine breiig-körnige Konsistenz zu bekommen. Ähnliches fand ich früher bei einer Wismut-Zinnlegierung.

2. Der elektrische Widerstand:

Der elektrische Widerstand der Kalium-Natriumlegierung wurde zwischen -60° und $+40^{\circ}$ gemessen. Bis etwa -20° ist der Widerstand eine lineare Temperaturfunktion mit einem Temperaturkoeffizienten $\alpha = 0,0097$ zwischen -60° und -20° . Bei -20° beginnt dann eine langsame Zunahme von α . Etwa bei -10° tritt nunmehr beim *Widerstand* eine analoge Schmelzfigur auf wie bei der Thermospannung, die sich bis $+2^{\circ}$ erstreckt. Dann wird α schnell sehr groß, so daß zwischen $+6^{\circ}$ und $+8^{\circ}$ ein fast senkrechter Anstieg der Widerstandskurve entsteht. Darauf biegt die Kurve schnell fast rechtwinklig um und verläuft von etwa 18° an wieder linear mit einem $\alpha = 0,0015$ zwischen $+20^{\circ}$ und $+40^{\circ}$ für das flüssige Metall.

Es lassen sich also bei der Messung des elektrischen Widerstandes die analogen Erscheinungen beobachten wie bei der Messung der Thermospannung. Es zeigt sich:

1. Ein unstetiges Schwanken von α zwischen kleinen und großen Werten in unmittelbarer Umgebung der Schmelztemperatur. Ebenso wie bei der Thermospannung kommt diese Erscheinung wohl auf Kosten der Schmelzwärme und der dadurch bewirkten Ungenauigkeit der Temperaturmessung zustande.

2. Eine bedeutende Verschiebung des einen Astes der Widerstandskurve. Diese beträgt z. B. bei $-20^{\circ} 415 \cdot 10^{-6} \Omega$; das bedeutet eine Zunahme des Widerstandes um fast 284 Proz.

3. Eine unstetige Änderung von $dW/dT = 17,0 \cdot 10^{-6} \Omega$ für das feste Metall auf $dW/dT = 11,0 \cdot 10^{-6} \Omega$ für das flüssige Metall, oder eine Änderung von α um 0,0082.

Auch bei der Widerstandsmessung macht sich der Ein-

fluß der Aggregatzustandsänderung schon deutlich bei -10° (ein wenig schon bei -20°) und noch bei $+18^{\circ}$ bemerkbar, in bemerkenswerter Übereinstimmung mit dem Verhalten der Thermospannung. Der spezifische Widerstand, der bei -60° erst $10 \cdot 10^{-6} \Omega$ ist, beträgt bei $+40^{\circ}$ schon $48,8 \cdot 10^{-6} \Omega$, statt des bei stetiger Zunahme zu erwartenden Wertes von $20,3 \cdot 10^{-6} \Omega$.

Zur Kontrolle wurden nach Beendigung der eben beschriebenen Versuche mit derselben Metallmasse noch mehrere Messungen des spezifischen Widerstandes angestellt. Zu diesem Zweck wurden unter Petroleumabschluß einige Glasröhrenchen von 1—2 mm Durchmesser durch Ansaugen mit der Legierung gefüllt und der Widerstand dieser Metallfäden nach der Abzweigungsmethode gemessen. Die Widerstandskapazität der benutzten Röhren wurde durch Vergleichsmessungen mit Quecksilber ermittelt. Für eine Temperatur von $+18^{\circ}$ wurde so ein spezifischer Widerstand der Legierung von $41,9 \pm 0,8 \cdot 10^{-6} \Omega$ ermittelt, während aus der Hauptmessung sich für $18^{\circ} \sigma = 42,0 \cdot 10^{-6} \Omega$ ergeben hatte.

Theoretische Betrachtungen.

Um die beschriebenen Erscheinungen, und zwar zunächst die thermoelektrischen, theoretisch zu deuten, braucht man nur im Sinne der elektronentheoretischen Ableitung des Ausdruckes für die Thermokraft zwischen zwei Metallen anzunehmen, daß dieselbe allein bedingt ist durch die verschiedenen Elektronendichten in den beiden Metallen. Will man speziell die thermoelektrischen Erscheinungen beim Schmelzen des einen Metalles, oder, was nach meiner Auffassung dasselbe ist, will man eine thermoelektrische Potentialdifferenz zwischen fester und flüssiger Phase des gleichen Metalles verständlich machen, so braucht man nur die Annahme einzuführen, daß in einem gegebenen Metalle die von der Masseneinheit getragene Elektronenzahl oder auch die Elektronendichte, d. h. die Anzahl der Elektronen im cem, direkt proportional ist der augenblicklichen Dichte des Metalles.¹⁾ Sei also im *festen* Metall bei der Temperatur des Schmelzpunktes die Anzahl der Elektronen N und ändere sich das Volumen eines cem

1) Vgl. auch J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. 47. S. 563. 1915 und K. Siebel, a. a. O., S. 52f.

des Metalles durch den Schmelzvorgang um γ ccm, so ist jetzt im flüssigen Metall die Anzahl der Elektronen im ccm nur noch

$$N' = \frac{N}{1 + \gamma}.$$

Wir setzen jetzt N und N' in die Formel für die Thermokraft ein:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{2R}{F} \ln \frac{N}{N'},$$

wo R und F die S. 261 genannten Größen bezeichnen. Dieser Ausdruck wird positiv, wenn $N > N'$ ist, d. h. wenn im festen Metall, wie wir ja angenommen hatten, die Zahl der Elektronen im ccm größer ist als im flüssigen Metall. Einem solchen Elektronenüberschuß im festen Metall entspricht aber ein elektrischer Strom, der an der Berührungsstelle von fest und flüssig vom flüssigen zum festen Teil des Metalles fließt.

Es resultiert der auswertbare Ausdruck:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{2R}{F} \ln(1 + \gamma)$$

Für die Legierung Kalium-Natrium fand Hagen, daß 1 g des festen Metalles bei 0° ein Volumen von 1,1120 ccm hat und 1 g des flüssigen Metalles bei $4,5^\circ$ ein Volumen von 1,1229. Der Unterschied dieser beiden Werte kann wohl angenähert als die Volumzunahme von 1 g beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand angesehen werden, da die Volumzunahme von 1 ccm des festen Metalles bei einer Temperaturerhöhung von 0° auf $4,5^\circ$ weniger als 0,001 beträgt, wenn nach Hagen der Ausdehnungskoeffizient des festen Metalles kleiner als der für das flüssige Metall ($= 0,0002861$) genommen wird. Daraus berechnet sich die Volumzunahme eines ccm beim Schmelzen zu

$$\gamma = 0,0098 \text{ ccm.}^1)$$

Setzt man diesen Wert für γ in obiger Formel ein, so ergibt sich: dE/dT , oder die thermoelektrische Spannung pro Grad zwischen festem und flüssigem Metall zu $1,68 \cdot 10^{-6}$ Volt.

Der aus dieser Potentialdifferenz resultierende Strom fließt vom flüssigen zum festen Teil des Metalles. Beobachtet

1) Bei Benutzung des zweiten von Hagen angegebenen Wertes für das Volumen von 1 g bei $0^\circ = 1,1185$ ccm würde sich $\gamma = 0,0097$ ergeben. An der Größenordnung des Resultates, und auf dies allein kommt es an, würde sich dadurch nichts ändern.

wurde in der Tat eine Verkleinerung der Thermokraft im Augenblick des Schmelzens $= 1,7 \cdot 10^{-6}$ Volt und diese Verkleinerung wurde als plötzliches Aufhören einer Spannung zwischen „fest“ und „flüssig“ angesprochen, die vom flüssigen zum festen Metall gerichtet ist.

Die eben durchgeführte Betrachtung steht also in qualitativer und bei Berücksichtigung der mannigfachen Störungen der Thermospannung beim Schmelzen auch in überraschend guter quantitativer Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Da bei den meisten wenig kristallinen Metallen, also ausgenommen besonders Wismut und Antimon, der Volumsprung beim Schmelzen annähernd dieselbe Größenordnung hat wie bei Kalium-Natrium, so ist die von mir früher¹⁾ beobachtete Änderung von dE/dT beim Schmelzen verschiedener Metalle (z. B. Hg $= 2 \cdot 10^{-6}$ Volt, Sn $= 2,0 \cdot 10^{-6}$ Volt, Pb $= 5 \cdot 10^{-6}$ Volt usw.) zwanglos aus der eben formulierten Theorie zu erklären. Bei der Winzigkeit der Effekte ist allerdings nicht immer völlige quantitative Übereinstimmung mit der Berechnung zu erwarten, zumal sicher auch noch sekundäre Beeinflussung durch kristalline Struktur usw. vorhanden ist.

Es sei noch bemerkt, daß in analoger Weise wie beim Wechsel des Aggregatzustandes auch bei alleiniger Ausdehnung der Metalle bei Temperaturerhöhung aus der durch den kubischen Ausdehnungskoeffizienten der beiden Metalle gegebenen Abnahme der Elektronendichten die Änderung von dE/dT mit der Temperatur, also $\frac{d^2 E}{dT^2}$ sich wird berechnen lassen.

Etwas weniger einfach gestaltet sich eine theoretische Deutung des Sprunges des spezifischen Widerstandes eines Metalles beim Wechsel des Aggregatzustandes. Die elektronentheoretische Formel für den spezifischen Widerstand σ ist:

$$\sigma = \frac{2mv}{ne^2l}, \text{ also } \sigma \sim \frac{v}{nl}.$$

Das Verhältnis von σ fest zu σ flüssig, in der Folge als σ und σ' bezeichnet, wird also $\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{n'v'l'}{nvl}$, wo die Größen n die Anzahl der Elektronen im eem, v die mittleren Geschwindigkeiten und l die freien mittleren Weglängen der Elektronen bedeuten, und die gestrichenen Größen für das flüssige Metall gelten.

1) A. a. O.

Um σ/σ' zu berechnen, müssen also die Verhältnisse n'/n , v/v' und l/l' bestimmt werden.

1. n'/n ergab sich bereits zu $\frac{1}{1+\gamma}$.

2. Nach einem Satz der kinetischen Gastheorie ist bei nicht zu großer Dichte die freie Weglänge umgekehrt proportional der Zahl der sich bewegenden Teilchen in der Volumeinheit. Es wird also

$$\frac{l'}{l} = \frac{n}{n'} = 1 + \gamma.$$

In dem Verhältnis $\frac{1+\gamma}{1}$ wird also die freie Weglänge der Elektronen bei Verflüssigung des Metalles infolge der plötzlichen Volumvergrößerung und der dadurch bedingten Verringerung der Elektronendichte zunehmen. Es kommt aber noch eine zweite Beeinflussung von l durch die Verflüssigung hinzu. Nimmt man an, daß im festen Metall die Moleküle ein starres Raumgitter bilden, und betrachtet man ein einzelnes Elektron, das sich zwischen diesen ruhenden Molekülen bewegt, so ergibt sich nach der kinetischen Gastheorie seine freie Weglänge zu $l = \frac{1}{Nr^2\pi}$, wo hier N die Zahl der Moleküle im ccm, r deren Radius bedeutet. Haben aber die Moleküle eine Relativbewegung zueinander und hat das Elektron die gleiche mittlere Geschwindigkeit und Weglänge wie die Moleküle, so folgt:

$$l' = \frac{3}{4} \frac{1}{Nr^2\pi}.$$

Diesen letzten Fall haben wir, wenn ein Elektron sich zwischen den Molekülen eines flüssigen Metalles bewegt. Es wird also

$$\frac{l'}{l} = \frac{3}{4}.$$

3. v^2 und v'^2 , d. h. die mittleren Geschwindigkeitsquadrate der Molekülen in einem Gase bei derselben Temperatur verhalten sich umgekehrt wie die Dichten. Auf unsern Fall angewandt, heißt das: Die Geschwindigkeiten der Elektronen im festen und flüssigen Metall verhalten sich umgekehrt wie die Wurzeln aus den Elektronendichten im festen und flüssigen Metall.

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{n'}{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}.$$

Aus 1—3 ergibt sich, daß die Änderung des spezifischen Widerstandes *nicht* abhängig ist von der Änderung der Zahl der Elektronen und der freien Weglänge, soweit diese infolge der Volumänderung zu erwarten ist; denn die beiden Verhältnisse $\frac{n'}{n} = \frac{1}{1+\gamma}$ und $l'/l = 1 + \gamma$ sind gleich und reziprok.

Für den Sprung des spezifischen Widerstandes beim Wechsel des Aggregatzustandes bleibt also allein bestimmd einmal die Änderung der freien Weglänge durch den Verflüssigungsbzw. Erstarrungsvorgang an sich, ohne Rücksicht auf Volumänderung, und zweitens die Änderung der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen infolge der Volumänderung. Es ergibt sich also schließlich:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{n' v' l'}{n v l} = \frac{3}{4\sqrt{1+\gamma}}.$$

Für die untersuchte Kalium-Natrium-Legierung mit einem $\gamma = 0,0098$ würde sich berechnen:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 0,746 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = 1,34.$$

Würde man σ aus den gemessenen Werten genau am Schmelzpunkte $+6,5^\circ$ berechnen, so würde sich $\sigma'/\sigma = 1,55$ ergeben. Wie aber ein Blick auf die Kurve II zeigt, ist als eigentlicher Sprung des Widerstandes die Differenz zwischen einem auf dem „flüssigen“ Kurvenast gemessenen und einem durch Verlängerung des „festen“ Kurvenastes durch Extrapolation gewonnenen σ bei etwa -15° zu rechnen. Dies würde aber ein

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 2,36 \quad \text{ergeben.}$$

Der theoretisch gefundene Wert stimmt also wohl der Größenordnung nach mit dem gemessenen überein, aber nicht der wirklichen Größe nach. Bedeutend besser würde, wie die Rechnung zeigt, die Übereinstimmung bei reinem K und Na, für die nach Baedeker¹⁾

$$1,39 \quad \text{bzw.} \quad 1,34$$

gemessen wurde, während die Berechnung auch etwa 1,34 ergeben würde. Genaue Berechnungen sind bei den meisten Metallen nicht möglich, da die Angaben über den Volumsprung

1) Baedeker, Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. S. 34.

beim Schmelzen im allgemeinen ziemlich unsicher sind. Eine weitere Schwierigkeit, die Formel

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{3}{4\sqrt{1+\gamma}}$$

an der Erfahrung zu prüfen, liegt, wie schon gezeigt, in der unsicheren Definition des Sprunges des Widerstandes, da dieser Sprung keineswegs an einer scharf bezeichneten Stelle, dem Schmelzpunkte eintritt, sondern, gestört und unterbrochen durch die unstetigen „Schmelzgebieterscheinungen“, sich über ein größeres Temperaturintervall erstreckt. Inwieweit auch noch Inhomogenitäten im festen Metall, die naturgemäß bei der Verflüssigung verschwinden, die Größe des Sprunges beeinflussen, liegt ganz außerhalb aller Erfahrung.

So viel aber, glaube ich, muß man aus obigen Ausführungen entnehmen, daß die aufgestellte Formel im wesentlichen die Änderung des elektrischen Widerstandes beim Wechsel des Aggregatzustandes richtig wiedergibt.

Auf demselben Wege muß sich übrigens auch eine einfache Beziehung zwischen Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes und kubischen Ausdehnungskoeffizienten finden lassen. Doch mag dies einer späteren Arbeit vorbehalten sein.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß auch die Änderung des spezifischen Widerstandes bei Kompression eines Metalles sich dem Sinne nach richtig aus den erläuterten Vorstellungen ergibt.

Man hat mehrfach der gaskinetischen Elektronentheorie den Vorwurf gemacht, daß sie die häufig¹⁾ beobachtete Vergrößerung des Widerstandes bei Kompression nicht erklären könne, vielmehr gerade das entgegengesetzte Resultat voraussehen lasse.²⁾ Dieser Vorwurf wird aber sofort hinfällig, wenn man, wie oben gezeigt, voraussetzt, daß bei konstanter Temperatur und Beibehaltung desselben Aggregatzustandes die Widerstandsänderung eines Metalles nur abhängt von der Änderung der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen, wenn der den Elektronen zur Verfügung stehende Raum sich ändert, z. B. durch Kompression. Es wird

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{v}{v'},$$

1) Z. B. P. W. Bridgemann, Proc. Am. Nat. Acad. **3**. 1917.

2) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**. S. 351. 1916.

wo σ' und v' sich auf das komprimierte Metall beziehen. Oder

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \sqrt{\frac{n^1}{n}}.$$

Sei ϵ die Kompressibilität eines Metalles, also die Volumenabnahme von 1 cem unter dem Drucke 1 Atm. Dann ist

$$n' = \frac{n}{1 - \epsilon}, \quad \text{also} \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{1 - \epsilon},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \sqrt{\frac{1}{1 - \epsilon}} \quad \text{wird} \quad > 1, \quad \text{d. h. } \sigma' < \sigma.$$

Wie die Rechnung zeigt, wird dieser Ausdruck etwas größer als 1, in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Kiel, Physikalisches Institut, Mai 1919.

Eingegangen 4. Juli 1919.

4. Zur Hydrodynamik der Hiebtöne;
von F. Krüger.

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde die Entstehung der so-nannten Hiebtöne auf die Wirbelablösung zurückgeführt und unter Zugrundelegung der von Kármánschen Theorie der Stabilität von Systemen geradliniger Wirbel die von Strouhal²⁾ gemessene Höhe dieser Töne aus den Beobachtungsdaten der von v. Kármán und Rubach³⁾ aufgenommenen Wirbelbilder einer strömenden Flüssigkeit hinter einem Stabe quantitativ in guter Übereinstimmung berechnet. Aus der Theorie ergab sich das empirisch gefundene Gesetz

$$\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$$

worin N die Schwingungszahl, U die Strömungsgeschwindigkeit und D die Dicke des Stabes oder Drahtes bedeutet.

Es war mir seinerzeit entgangen, daß der rein formale Zusammenhang dieser drei Größen sich aus den Formeln für die hydrodynamische Ähnlichkeit ergibt, was wohl zuerst Lord Rayleigh⁴⁾ im zweiten Bande seiner Theory of sound, London 1896, S. 413 (in der deutschen Übersetzung der ersten Auflage dieses Werkes fehlt u. a. auch dieses Kapitel) gezeigt hat, was ferner unabhängig M. v. Smoluchowski⁵⁾ abgeleitet hat. Dieser auf Dimensionsbetrachtungen begründete Zusammenhang sagt natürlich gar nichts aus über die Natur und Ursache dieser Töne, wie denn auch Lord Rayleigh betont, daß „eine dynamische Theorie noch zu geben sei.“ Diese

1) F. Krüger und A. Lauth, Ann. d. Phys. **44**. S. 801. 1914.

2) V. Strouhal, Wied. Ann. **5**. S. 216. 1878.

3) Th. v. Kármán, Göttinger Nachr. S. 541, 1912; Th. v. Kármán und H. Rubach, Physik. Zeitschr. **13**. S. 49. 1912.

4) Lord Rayleigh, Theory of sound, 2. edit., Vol. II, S. 413. London 1896.

5) M. v. Smoluchowski, Anzeiger d. Akad. d. Wissenschaft. Krakau. Math.-naturw. Klasse. S. 153. 1903. Phil. Mag. (16) **7**. S. 667. 1904.

dynamische Theorie ist erst durch die in der Arbeit von A. Lauth und mir quantitativ entwickelte Wirbeltheorie der Hiebtöne gegeben, von der mir u. a. M. v. Smoluchowski seinerzeit schrieb, daß „sie den Mechanismus derselben völlig aufklärt“.

Es kann daher nicht als eine zutreffende Darstellung des Sachverhaltes angesehen werden, wenn Lord Rayleigh in einer neuen Arbeit¹⁾ schreibt, daß Lauth und ich „die Arbeit Strouhals neu diskutiert hätten“ und ohne ein Wort davon zu sagen, daß wir in unserer Arbeit die Wirbeltheorie der Hiebtöne unter Zugrundelegung der v. Kármánschen Arbeit quantitativ entwickelt und an den Experimenten Strouhals bestätigt haben, seinerseits die Beziehung der Wirbelablösung zu den Hiebtönen behandelt und auch die v. Kármánsche Stabilitätsberechnung des Wirbelsystems erwähnt, von einer quantitativen Verknüpfung der hydrodynamischen und akustischen Erscheinungen jedoch absieht.

Er beschreibt in dieser Abhandlung jedoch neuerdings von ihm angestellte Experimente, um zu prüfen, ob die für die akustischen Schwingungen in Luft gefundene Beziehung

$$\frac{N \cdot D}{U} = 0,19,$$

auch für die Strömung in Wasser gilt. Die Versuche sind in der Weise angestellt, daß ein Stab, der um eine horizontale, auf Schneiden ruhende Achse schwingen kann und dessen Eigenschwingungsdauer durch die Verstellung eines Gewichtes auf ihm veränderlich ist, mit seinem unteren Ende in strömendes Wasser taucht. Durch die abwechselnde Wirbelablösung auf beiden Seiten wird dieser Stab in Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung versetzt und zwar dann mit maximaler Amplitude, wenn seine Eigenschwingungsdauer in Übereinstimmung ist mit der Ablösungsdauer der Wirbel, ganz analog wie bei der Resonanz der Drahtschwingungen an Telegraphendrähten oder Äolsharfensaiten mit den Schwingungen der primär erregenden Hiebtöne. Die Werte, welche Lord Rayleigh für den obigen Ausdruck auf diese Weise für drei Stäbe von der Dicke 8,5 mm, 5,0 mm und 3,5 mm findet, sind 0,120 0,138 und 0,128, alles Werte, die gegenüber den von Strouhal akustisch gefundenen erheblich zu klein sind.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 29. S. 433. 1915.

So schön diese Anordnung qualitativ die Transversabilität der Schwingungen bei den durch Wirbelablösung bedingten Schwingungen (im Gegensatz zu den Schwingungen der gestrichenen Saiten) demonstriert, so zweifelhaft ist es, ob die spezielle Versuchsanordnung Lord Rayleighs gute, quantitative Resultate erhoffen lassen konnte. Das von ihm benutzte Wasserreservoir bestand aus einem runden Bassin von 36 cm Durchmesser, das auf einem drehbaren Tisch in Umdrehung gesetzt werden konnte. Es wurde mit der Hand in Bewegung gesetzt, indem zwei sich kreuzende Speichen, welche den oberen Teil des Drehtisches bildeten, angestoßen wurden, bis die Umdrehungsgeschwindigkeit konstant war. Sie wurde so reguliert, daß der Vorbeigang von ein oder zwei Speichen in Übereinstimmung mit einer bestimmten Zahl der Schläge eines halben Sekunden angebenden Metronoms war. Diese jedenfalls etwas primitive Geschwindigkeitsregulierung und -Messung hatte zur Voraussetzung, daß das Wasser mit dem Bassin wie ein fester Körper rotierte. Das kann aber bei der Kleinheit der Wassermassen zweifelhaft werden, wenn der hineingehängte Stab durch seinen Widerstand die Rotation des Wassers hemmt. Diesen Einwand hat denn auch schon Lord Rayleigh selbst erhoben und die Größe des dadurch bedingten Fehlers dadurch zu schätzen versucht, daß er einen zweiten Stab von gleichem Durchmesser wie den ersten (8,5 mm) diesem diametral gegenüberstellte und die jetzt veränderte Strömungsgeschwindigkeit maß, welche den Stab wieder in Resonanzschwingungen versetzte; es ergab sich das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeiten wie 6:5, und damit der korrigierte Wert der Konstanten zu 0,148 also immer noch erheblich zu klein. Abgesehen davon, daß diese Korrektur nur ungenau sein konnte, ist noch zu bedenken, daß der schwingende Stab, dessen Amplituden keineswegs sehr klein sind, sondern nach neuen gleich zu sprechenden Versuchen bis zu etwa $\frac{1}{2}$ cm nach jeder Seite betragen, bei dieser Anordnung bei seinen Schwingungen in Gebiete von verschiedener Strömungsgeschwindigkeit gerät.

Lord Rayleigh hat dann die Frage aufgeworfen, ob die Diskrepanz zwischen seinen hydrodynamischen und den akustischen Versuchen vielleicht in einer Unexaktheit der akustischen Messungen Strouhals begründet sei. Er hat dessen Experimente in der Form wiederholt, daß er eine Saite über einer

Öffnung von 66 cm Länge und 10 cm Breite in einem Schornstein ausspannte. Die Stärke des Luftstroms wurde hauptsächlich durch die Intensität des Feuers, z. B. durch daraufgeworfene Papierstückchen reguliert, teils auch durch Regulierung einer Nebenöffnung für den Zug, bis eine solche Strömungsgeschwindigkeit erreicht war, daß Resonanz der Hiebtonfrequenz mit dem dritten Oberton der Saite (256 Schwingungen) eintrat. Die Luftgeschwindigkeit wurde durch die Druckmessung auf einen Spiegel der Größe 10,1 . 1,6 em bestimmt; der Spiegel bildete das eine Ende eines horizontalen Pendels, das durch ein Gegengewicht ausbalanciert war. Die Geschwindigkeit wurde aus dem Druck mittels der Formel $P = C \cdot \varrho \cdot U^2$, worin P den Druck, ϱ die Dichte bedeutet, berechnet, wobei für die Konstante C der von Stanton für eine Platte von 5,1 cm im Quadrat gefundene Wert von 0,52 eingesetzt wurde (für große Platten gilt der Wert 0,62). So ergab das Experiment für den Ausdruck $\frac{N \cdot D}{U}$ den Wert 0,127, also einen wesentlich kleineren Wert als Strouhal gefunden hatte; doch weist schon Lord Rayleigh selbst auf die Unsicherheit des von ihm gefundenen Wertes wegen der Unsicherheit der Konstante C hin. Der ganzen Anordnung nach verdienen daher die Messungen Strouhals, der doch nicht nur einen Wert bestimmte, sondern über einen großen Bereich von Geschwindigkeiten und Stab- bzw. Drahtdicken die Werte des Ausdrückes $\frac{N \cdot D}{U}$ mit großer Sorgfalt bestimmte, wohl größeres Vertrauen als diese vereinzelte Messung.

Die vorzügliche Übereinstimmung, welche die Berechnung des Ausdrucks $\frac{N \cdot D}{U}$ aus den Daten der hydrodynamischen Wirbelbilder von v. Kármán und Rubach mit den akustischen Messungen Strouhals in der Arbeit von Lauth und mir ergeben hat, macht die Richtigkeit der Strouhalschen Zahlen von vornherein recht wahrscheinlich. Um diese Übereinstimmung nunmehr durchaus sicherzustellen, habe ich die oben beschriebenen Rayleighschen Messungen mit dem in der strömenden Flüssigkeit pendelnden Stabe wiederholt, aber mit einer für exakte Messungen geeigneter Versuchsanordnung. Es diente dazu ein kleiner Wasserrundlauf, der in der nebenstehenden Fig. 1 wiedergegeben ist.

Seine Dimensionen sind folgende: Die größte Ausdehnung in der Längsrichtung beträgt 107 cm, in der Breite 57 cm. Der aus Glasplatten zusammengesetzte Teil, in dem die Strömungserscheinungen untersucht wurden, hat eine Länge von 55 cm und eine Breite von 20 cm. Die Wasserhöhe beträgt 10 cm. Das Wasser wird zur Strömung gebracht durch einen achtflügeligen Propeller in dem dem Glastrog gegenüberliegenden runden Rohr von 10 cm Durchmesser; die Achse

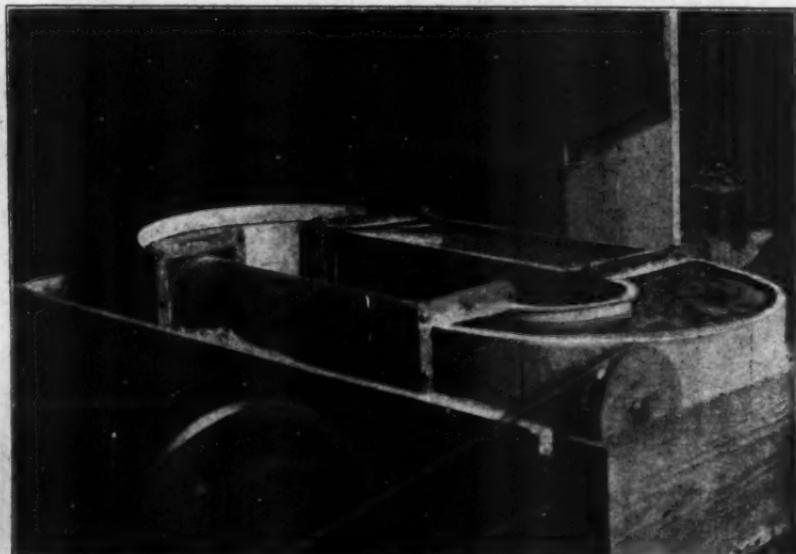


Fig. 1.

des Propellers ist durch eine Stopfbüchse an dem einen Ende aus dem Rundlauf herausgeführt und trägt hier eine Riemscheibe. Der Rundlauf steht zur Sicherung gegen die Übertragung von Erschütterungen in einer mit Sand gefüllten flachen Holzkiste, der antreibende Motor auf einem gesonderten Tische, das Übersetzungsrad auf einem dritten zwischen den Tischen des Rundlaufes und des Motors; zur Übertragung des Antriebes vom Übersetzungsrad auf den Rundlauf dient als Riemen eine Drahtspirale. So war eine Übertragung der Erschütterungen durch den Motor, die vor Einführung dieser

Vorsichtsmaßregeln sehr störend waren, weitgehend vermieden. Eine durchaus ausreichende Beseitigung des durch die Propellerflügel verursachten Turbulenz wurde durch ein Drahtnetz hinter dem Propeller erreicht.

Die Strömungsgeschwindigkeit wurde mit der Rotationsgeschwindigkeit des Elektromotors durch einen gut variablen Schieberwiderstand in bequemer und genauer Weise reguliert; sie wurde gemessen, indem die Zeit bestimmt wurde, welche ein im Innern der Flüssigkeit schwimmendes Aluminiumflitterchen zum Durchlaufen einer Strecke $s = 11$ cm benötigte.

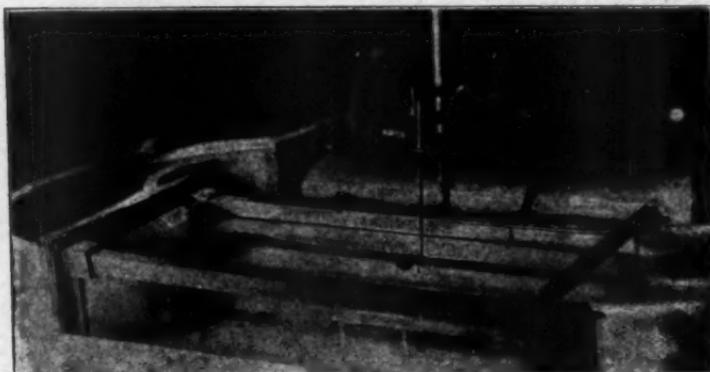


Fig. 2.

Solche Aluminiumflitter wurden aus der gewöhnlichen Aluminiumbronze, die infolge einer anhaftenden Fettschicht nur auf dem Wasser schwimmt, gewonnen, indem diese Fettschicht durch längeres Erhitzen in einem Glasrohr unter ständigem Überleiten von Luft entfernt wird.

Die Stäbe, welche durch die Wirbelablösung zu Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung angeregt werden sollten, waren mit einem Schraubehen in einem Querarm befestigt, der in Spitzen gelagert war. Sie tauchten mit ihrem unteren Ende mehrere Zentimeter tief in das strömende Wasser, wie dies die obenstehende Fig. 2 zeigt.

Durch Höher- oder Tieferstellen wurde die Eigenschwingungsdauer der Stäbe verändert. Der eine der benutzten Stäbe war aus Eisen und hat einen Durchmesser von 0,5 em und

eine Länge von 19,5 cm. Er machte eine Schwingung pro Sekunde, wenn der Abstand seines oberen Endes vom Drehpunkt 8,5 cm betrug. Die beiden weiteren benutzten Stäbe waren unten zugeschmolzene Glasröhren, beide von einer Länge von 17,4 cm; die eine hatte einen Durchmesser von 0,48 cm, die andere einen solchen von 0,25 cm. Sie vollführten eine Schwingung pro Sekunde, wenn ihr oberes Ende vom Drehpunkt 7,8 cm entfernt war.

Waren diese Stäbe in das strömende Wasser etwa in der Mitte des Glastroges eingehängt, so wurde die Strömungsgeschwindigkeit so lange reguliert, bis sie Schwingungen von maximaler Amplitude vollführten, bis also ihre Eigenschwingsfrequenz in Resonanz war mit der Frequenz der Wirbelablösung. Diese Einstellung war auf die Veränderung der Strömungsgeschwindigkeit recht empfindlich, konnte also recht genau gemacht werden. Die schwingenden Stäbe hatten bei Resonanz Amplituden von etwa $\frac{1}{3}$ cm auf beiden Seiten. Zur Bestimmung der Frequenz N des in Resonanz schwingenden Stabes wurde die Zeit τ bestimmt, in der eine gewisse Zahl n von Schwingungen vom Stabe ausgeführt wurden; es war also $N = n/\tau$.

Die mit dem Eisenstab von 0,5 cm Durchmesser erhaltenen Resultate gibt die folgende Tabelle I wieder.

Tabelle 1.
Eisenstab vom Durchmesser $D = 0,5$ cm.

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec	Mittel	$U =$ s/T in cm/sec	Anzahl n der be- obachtet Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n - Schwingungen in sec		Fre- quenz N	$\frac{N \cdot D}{U}$
				Mittel	Mittel		
3,0	3,2	3,0			16,6		
3,4	3,6	3,4			16,2		
3,4	3,4				16,4		
3,4	3,4					16,4	1,22
							0,184
3,6	3,2	3,4			16,4		
3,4	3,2	3,4			16,2		
3,6	3,4	3,6			16,4		
3,4	3,6				16,4		
3,4	3,2						

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec			$U =$ s/T in sec/cm	Anzahl n der be- obachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n - Schwingungen in sec	Fre- quenz N	$N \cdot D$ U
Mittel							
3,8	4,0	3,8			18,2		
3,8	3,6	3,8			18,0		
4,0	3,8	3,6	3,84	2,87	20	17,8	18,0
3,8	4,0	3,8			18,0	1,11	0,194
3,8	4,2				18,0		
3,8	3,8	3,8			18,0		
3,8	4,2	3,8			18,0		
3,6	3,8	3,8	3,86	2,85	20	18,0	18,0
4,0	3,8	3,8			18,0	1,11	0,195
4,0	4,0				18,0		
4,4	4,6	4,2			20,2		
4,4	4,4	4,2			20,4		
4,2	4,2	4,4	4,33	2,55	20	20,2	20,2
4,2	4,2	4,4			20,2	0,99	0,196
4,4	4,4				20,2		
4,4	4,4	4,2			20,2		
4,4	4,2	4,6	4,27	2,58	20	20,2	20,2
4,2	4,2	4,2			20,0	0,99	0,192
4,2	4,4				20,2		
4,6	4,4	4,4			21,0		
4,4	4,4	4,4			21,0		
4,4	4,4	4,2	4,43	2,48	20	21,0	21,0
4,4	4,6	4,4			21,0	0,952	0,192
4,6	4,4				21,0		
5,8	5,8	5,6			27,4		
5,6	5,6	5,8			27,2		
6,0	5,6	5,8	5,71	1,93	20	27,2	27,2
5,6	5,8				27,0	0,735	0,190
5,6	5,6				27,2		
5,8	5,6	5,6			27,2		
5,8	5,6	5,8			27,2		
5,6	5,8	6,0	5,77	1,91	20	27,2	27,2
5,8	6,0	5,8			27,2	0,735	0,193
5,8	5,6	5,8			27,2		
5,8	5,8				27,2		
6,8	7,0	7,0			15,8		
7,0	6,8	6,8	6,88	1,60	10	15,6	
6,8	6,6				15,8	15,7	0,637
7,0	7,0				15,8		

Mittel 0,192

Für diesen Eisenstab ergibt sich also als Mittelwert

$$\frac{N \cdot D}{U} = 0,192.$$

Die entsprechenden Messungen an dem Glasstab von der Dicke 0,43 cm gibt die Tabelle 2 wieder.

Tabelle 2.
Glasstab vom Durchmesser $D = 0,43$ cm.

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec			$U =$ s/T in cm/sec	Anzahl n der be- obachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n - Schwingungen in sec	Mittel	Fre- quenz N	$N \cdot D$ U
Mittel								
4,2	4,2	4,0			17,0			
4,4	4,2	4,2			17,0			
4,2	4,0	4,0	4,17	2,64	20	17,0	17,0	1,18 0,192
4,2	4,2	4,2			17,0			
4,0	4,4							
5,0	4,8	4,8			20,0			
5,0	4,8	4,8	4,87	2,26	20	20,0	20,0	1,00 0,190
4,8	5,0	4,8			20,0			
5,2	5,4	5,4			21,2			
5,2	5,4	5,2			21,4			
5,4	5,2	5,4	5,30	2,07	20	21,2	21,2	0,943 0,196
5,2	5,2	5,4			21,2			
5,6	5,6	5,4			21,2			
5,4	5,6	5,6			22,0			
5,6	5,4	5,6	5,57	1,97	20	22,0	22,0	0,909 0,198
5,8	5,6				22,0			
5,6	5,6				22,0			
6,0	5,8	6,2			24,4			
5,8	5,8	6,0			24,2			
6,0	5,8	6,2	5,99	1,84	20	24,2	24,2	0,826 0,193
6,0	6,0	6,0			24,2			
6,2	5,8	6,2			24,2			
6,0	6,0				24,2			
6,8	7,0	6,8			27,4			
7,0	6,8	6,8			27,4			
7,0	6,8	7,0	6,89	1,60	20	27,4	27,4	0,730 0,196
6,8	7,0				27,4			

Mittel: 0,194

Für diesen Stab erhalten wir also als Mittelwert

$$\frac{N \cdot D}{U} = 0,194.$$

Die Messungen mit dem Glasstab von der Dicke $D = 0,25$ cm enthält die folgende Tabelle 3.

Tabelle 3. Glasstab vom Durchmesser $D = 0,25$ cm.

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec			$U =$ s/T in cm/sec	Anzahl n der be- obachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n - Schwingungen in sec	Fre- quenz N	$N \cdot D$ U
			Mittel		Mittel		
5,6	5,4	5,4			13,0		
5,6	5,4	5,6			13,0		
5,4	5,6	5,6	5,51	2,00	20	13,0	1,54
5,6	5,4						0,193
6,6	6,8	6,8			16,2		
6,8	6,8	6,6			16,0		
6,8	7,0	6,8			16,0		
7,0	6,8	6,6	6,79	1,62	20	15,8	16,0
6,6	6,8					16,2	1,25
7,0	6,8					16,0	0,191
7,4	7,4	7,2			17,4		
7,2	7,2	7,6			17,4		
7,2	7,4	7,4	7,32	1,50	20	17,4	1,15
7,4	7,4	7,2					0,191
7,2	7,4	7,2					
7,4	7,2						
8,4	8,4	8,6			20,6		
8,6	8,6	8,4			20,4		
8,6	8,4	8,4	8,46	1,30	20	20,4	20,5
8,4	8,4					20,6	0,975
8,4	8,4					20,6	0,188
						20,4	

Mittel: 0,191

Aus dieser Tabelle ergibt sich der Mittelwert $\frac{N \cdot D}{U} = 0,191$.

Der Mittelwert sämtlicher Messungen an den drei verschiedenen Stäben beträgt 0,192. Er ist also in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem Werte 0,20, der von Lauth und mir aus den hydrodynamischen Strömungsbildern von v. Kármán und Rubach abgeleitet wurde, wie auch mit dem Werte 0,19 der zahlreichen und sorgfältigen, übrigens auf Veranlassung F. Kohlrauschs in seinem damaligen Würzburger Institut angestellten Messungen von Strouhal. Sowohl die hydrodynamisch wie die akustisch bestimmten Werte des Ausdruckes $\frac{N \cdot D}{U}$ von Lord Rayleigh sind diesem durch die dreifache Übereinstimmung gesicherten Werte gegenüber erheblich zu klein.

Die Beziehung $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ ist insofern ein Grenzgesetz, als sie bei sehr kleinem Durchmesser der Stäbe ihre

Gültigkeit verliert, wie die der Arbeit Strouhals entnommene Figur 5 in der Arbeit von Lauth und mir deutlich zeigt: Die N - U -Kurven sind für kleine Stabdicken keine Geraden mehr, sondern steigen für kleine U -Werte beschleunigt an, besitzen aber für große U -Werte Gerade als Asymptoten, welche die U -Achse in einem Abstande U_0 schneiden, der mit abnehmendem Stabdurchmesser wächst. Innerhalb des Gültigkeitsbereiches jenes Gesetzes verlangen, wie vor allem v. Smoluchowski¹⁾ betont hat, die Ähnlichkeitssätze die Unabhängigkeit des Ausdrückes $\frac{N \cdot D}{U}$ von Druck und Temperatur. Nun hat aber Strouhal doch eine, wenn auch nicht große, Temperaturabhängigkeit desselben zwischen $9,5^\circ$ und 37° C gefunden und zwar ein Sinken des Tones N bei konstanter Geschwindigkeit und konstantem Stabdurchmesser, also auch ein Sinken des Ausdrückes $\frac{N \cdot D}{U}$. Von Smoluchowski hält diese Temperaturabhängigkeit für zweifelhaft, weist aber auch schon darauf hin, daß die Grundformel $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ nicht allgemein gültig sei. In der Tat liegt hier kein Widerspruch vor, denn Strouhal hat diese Temperaturabhängigkeit gemessen bei Messingdrähten vom Durchmesser $D = 0,393$ mm und $D = 0,179$ mm, also bei Dicken, bei denen die Gültigkeit des Gesetzes $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ nicht mehr zutrifft.

Die Abweichungen von diesem Gesetz hat nun Lord Rayleigh²⁾ mit Hilfe der hydrodynamischen Ähnlichkeitssätze mit der kinematischen Zähigkeit ν in Beziehung zu setzen gesucht, indem er die Konstante des Gesetzes $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ als Funktion einer dimensionslosen Größe schreibt, und zwar setzt $N = \frac{U}{D} \cdot f\left(\frac{\nu}{U \cdot D}\right)$.

Da die Werte von $\frac{\nu}{U \cdot D}$ bei den akustischen Messungen Strouhals sehr klein sind, entwickelt Rayleigh $f\left(\frac{\nu}{U \cdot D}\right)$ in eine Reihe: $f\left(\frac{\nu}{U \cdot D}\right) = a + b \cdot \frac{\nu}{U \cdot D} + c \cdot \frac{\nu^2}{U^2 \cdot D^2}$,

woraus dann folgt

1) M. v. Smoluchowski, a. a. O.

2) Lord Rayleigh, Theory of sound, 2. edit., Vol. II, S. 372, 1896; Phil. Mag. (6) 29. S. 435. 1915.

$$N = a \cdot \frac{U}{D} + b \cdot \frac{v}{D^2} + c \cdot \frac{v^2}{U \cdot D^3}$$

Bei Vernachlässigung des dritten Gliedes und Einsetzung der Zahlen Strouhals folgt weiter

$$\frac{ND}{U} = 0,195 \left(1 - \frac{20,1 v}{U \cdot D} \right)$$

Setzt man in diese Gleichung einmal die Werte für 11° , zweitens für 31° ein, so berechnet sich daraus die Differenz der Werte $v_{31^\circ} - v_{11^\circ}$ zu 0,016 c. g. s. in guter Übereinstimmung mit dem beobachteten Werte 0,018.

Die Prüfung dieser Beziehung für strömendes Wasser ist zur Zeit noch nicht möglich, da es an ausreichenden Beobachtungen fehlt. Bei Bénard¹⁾ findet sich die Angabe, daß das Verhältnis des Wirbelabstandes l zum Durchmesser D des Hindernisses folgende Werte hat:

D	$l/D = b$	Für $D=4$ mm hat also der Ausdruck $b=l/D$ fast noch genau denselben Wert wie bei v. Kármán und Rubach (4,3), der also dem
4 mm	4,4	$\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$
2 mm	6,5	Gültigkeitsbereich der Formel
1 mm	8,9	

entspricht. Für kleinere D wird die Größe b erheblich größer und da, wie in der Arbeit von Lauth und mir gezeigt, $\frac{N \cdot D}{U} = \frac{1-a}{b}$ so sinkt damit der Wert dieses Ausdrückes analog wie dieselbe Größe für die akustisch gemessenen Werte. Da aber die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit nicht untersucht ist, läßt sich ein weitergehender Vergleich noch nicht anstellen.

Über die physikalische Ursache für die Abweichungen der Beziehung $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ läßt sich auf Grund der rein formalen Beziehungen der Ähnlichkeitssätze natürlich nichts aussagen. Eine Aufklärung hierüber muß vielmehr einer eingehenden Untersuchung über die entsprechenden Abweichungen bei den hydrodynamischen Strömungserscheinungen vorbehalten bleiben.

Herrn stud. math. E. Schmidtke bin ich für eifrigste Unterstützung bei den Messungen zu großem Dank verpflichtet.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

1) H. Bénard, Compt. rend. 147. S. 839. 1908.

(Eingegangen 31. Mai 1919.)

5. Über Gay-Lussac- und Boyle-Temperaturen;
von R. H. Weber.

1. Anknüpfend an die drei „Komponentengesetze“ der idealen Gase, die Gesetze von Boyle-Mariotte, von Gay-Lussac und von Joule definiert Schames¹⁾ „drei charakteristische Kurven I. Art“ für die realen Gase, denen er die Namen „Boylekurve“, „Gay-Lussackurve“ und „Joulekurve“ gibt, und die innerhalb der Zustandsfläche des realen Gases verlaufen müssen. Diese drei Komponentengesetze

$$(1) \quad \text{Boyle: } \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T = - \frac{v}{p} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial (pv)}{\partial p} \right)_T = 0,$$

$$(2) \quad \text{Gay-Lussac: } T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v = 0,$$

$$(3) \quad \text{Joule: } T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p = 0$$

sind nicht voneinander unabhängig, sondern durch die allgemeine für jede Relation zwischen drei Variablen geltende Beziehung

$$(4) \quad \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$$

miteinander verknüpft. Das entspricht der Tatsache, daß die idealen Gase nur durch zwei Eigenschaften vor den realen Gasen ausgezeichnet sind, nämlich erstens durch die Eigenschaft, daß das Produkt (pv) lediglich eine Temperaturfunktion (welche, ist willkürlich und entscheidet über die Wahl der Temperaturskala), und zweitens durch die Eigenschaft, daß auch die innere Energie lediglich eine (natürlich nicht willkürliche, aber auch nicht für Idealgase speziell vorgeschriebene) Temperaturfunktion ist.

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 57. S. 321. 1918.

Die Relation (4) fordert für die drei genannten charakteristischen Kurven, daß wenn sich zwei von ihnen in einem Punkte schneiden, durch diesen Punkt auch die dritte gehen muß. Die folgenden Ausführungen aber zeigen, daß ein solcher Schnitt — wenn gewisse Erfahrungstatsachen (Gleichung 6) allgemeine Gültigkeit haben, nur bei $T = 0$ stattfinden kann. Das aber ist nach Schames¹⁾ unmöglich. Dann wäre auch ein Schnitt von nur zweien der drei charakteristischen Kurven I, III, V nicht möglich.

2. Die Gleichung (2) definiert auf der Zustandsfläche eine Kurve, die alle diejenigen Punkte enthält, in denen der Joule-Kelvinsche Kühleffekt verschwindet, die „Inversionspunkte“. Zu jedem spezifischen Volumen gehört eine eigene Inversionstemperatur; doch ist die Abhängigkeit dieser vom Volumen praktisch nur sehr geringfügig (Nr. 7, Schluß), so daß man praktisch für jedes Gas kurz von seiner Inversionstemperatur sprechen kann.

3. Die Boylekurve (Gleichung 1) umfaßt alle die Punkte, in denen das Produkt ($p v$) von der Temperatur unabhängig wird. Sie erreicht für $p = 0$ einen Punkt, den Kamerlingh-Onnes²⁾ als Boylepunkt bezeichnet; und Kamerlingh-Onnes und seine Schüler finden, daß die diesem Punkte zugehörige „Boyletemperatur“ in der absoluten Temperaturskala halb so hoch liegt, wie die Inversionstemperatur, eine Tatsache, die in Einklang steht mit der Jäger-Boltzmannschen Form der Zustandsgleichung³⁾:

$$(5) \quad p v + \frac{a}{v} = R T \left(1 + \frac{b}{v} + \alpha_1 \frac{b^2}{v^2} + \alpha_2 \frac{b^3}{v^3} + \dots \right).$$

4. Die eben genannte Beziehung zwischen dem Boyle- und Inversionspunkt ist aber noch allgemeiner gültig, wie in folgendem gezeigt werden soll. Erstens einmal gilt sie für die zwei zu jedem vorgegebenen Volumen gehörigen Temperaturen

1) A. a. O. Gleichung (5).

2) H. Kamerlingh-Onnes, Vers. Ak. v. Wet. 17. S. 168 und in früheren Arbeiten. Ferner Comm. Phys. Lab. Leiden 69 bis 102 an versch. Orten.

3) Literatur siehe Weber und Gans. Repetitorium I². S. 179.

der Boylekurve (T_b) und der Gay-Lussackkurve (T_g) der Gleichungen (1) und (2), also wird

$$(6) \quad T_g = 2 T_b.$$

Zweitens gilt diese Gleichung nicht nur im Falle der Gültigkeit der Jäger-Boltzmannschen Zustandsgleichung, sondern auch noch für andere Formen derselben.

5. Wir setzen zunächst eine Form

$$(7) \quad p v = R T \cdot f(v) + \varphi(v)$$

für die Zustandsgleichung voraus. Die Gleichung (1) kann, da

$$(\partial/\partial p)_T = (\partial/\partial v)_T (\partial v/\partial p)_T$$

ist, und $(\partial v/\partial p)_T$ wohl unendlich, aber nie gleich Null werden kann, ersetzt werden durch die Gleichung

$$(1') \quad \left(\frac{\partial(pv)}{\partial v} \right)_T = 0.$$

Das gibt für die Boyletemperaturen nach (7) die Beziehung

$$(8) \quad T_b = - \frac{1}{R} \frac{\varphi'}{f'},$$

wenn unter φ' und f' die Differentialquotienten der Funktionen φ und f nach v verstanden sind.

6. Nach (7) wird

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} \cdot f(v) + \frac{R T}{p} f'(v) \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p + \frac{\varphi'(v)}{p} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

und deshalb

$$T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v = \frac{R T \cdot f(v) - p v + R T v f'(v) + v \varphi'(v)}{p - R T f'(v) - \varphi'(v)}.$$

Das gibt unter nochmaliger Verwendung von (7) wegen (2) die Gay-Lussactemperaturen

$$(9) \quad T_g = \frac{\varphi - v \varphi'}{R v f'}.$$

7. Die Gleichungen (8) und (9) lehren, daß (6) nur dann erfüllt ist, wenn

$$\varphi + v \cdot \varphi' = 0,$$

d. h., wenn

$$\varphi(v) = \frac{\text{const.}}{v}$$

ist, also nur dann, wenn die Gleichung (7) die speziellere Form hat

$$(10) \quad p v = R T \cdot f(v) - \frac{a}{v},$$

und das ist in der Tat eine allgemeinere Form als diejenige von Jäger-Boltzmann [Gleichung (5)]. Die Funktion $\varphi(v)$ muß also die durch den Kohäsionsdruck (a/v^3) geforderte Form $-a/v$ haben, wenn die Gleichung (6) erfüllt sein soll. Allerdings fordert diese Gleichung (6) nicht, daß a wesentlich positiv ist.

Es wird jetzt

$$T_g = - \frac{2}{R} \frac{a}{v^3 f'(v)} = 2 T_b$$

und nach (5)

$$T_g = \frac{2a}{R \cdot b} \frac{1}{b + 2 \alpha_1 \frac{b^2}{v} + 3 \alpha_2 \frac{b^3}{v^2} + \dots},$$

und schon, wenn man in (5) die Klammerreihe nach dem zweiten Gliede abbricht, wird T_g von v unabhängig

8. Setzt man in (7)

$$\varphi(v) = - \frac{a}{v^3},$$

so erhält man eine allgemeinere Form der ersten von Dieterici¹⁾ aufgestellten Zustandsgleichung ($n = 2/3$):

$$\left(p + \frac{a}{v^{2/3}} \right) (v - b) = R T.$$

Es wird nach (9) jetzt

$$T_g = (n + 1) T_b$$

und nach Dieterici

$$T_g = \frac{4}{3} T_b.$$

9. In der Gleichung (10) entstammt das Glied a/v dem Kohäsionsdruck (a/v^3) der ältesten (v. d. Waals, Clausius) der Zustandsgleichungen, der also abgesondert von der allgemeinen Funktion $f(v)$ auftritt.

Läßt man umgekehrt das Kernvolumen (b) der älteren Formen bestehen, und verallgemeinert den Kohäsionsdruck, indem man setzt

1) C. Dieterici, Wied. Ann. 69. S. 699. 1899.

$$(11) \quad p(v - b) = R T \cdot f(v T),$$

worin f eine Funktion des Produktes $(v T)$ sein soll, was freilich hier eine sehr willkürliche Annahme ist, so erhält man eine Verallgemeinerung der zweiten (transzendenten) Form der Zustandsgleichung von Dieterici¹⁾:

$$(12) \quad p(v - b) = R T e^{-\frac{c}{R T v}}.$$

10. Aus (11) folgt

$$p v = \frac{R T v}{v - b} f(v T)$$

und

$$\left(\frac{\partial(p v)}{\partial v} \right)_T = \frac{R T}{v - b} \left(1 - \frac{v}{v - b} \right) \cdot f(v T) + \frac{R T^2 v}{v - b} f'(v T),$$

wenn f' den Differentialquotient von f nach dem Produkt $(v T)$ bedeutet. Das gibt unter nochmaliger Berücksichtigung von (11) nach (1)

$$(13) \quad T_b^2 = \frac{b}{R v} \frac{p}{f'}.$$

11. Aus (11) folgt weiter:

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p} f + \frac{R T v}{p} f' + \frac{R T^2}{p} f' \frac{\partial v}{\partial T}$$

und deshalb

$$T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - v = \frac{R T f + R T^2 v f'}{p - R T^2 f'} - v.$$

Das verschwindet für

$$(14) \quad T_g^2 = \frac{b}{2 R v} \frac{p}{f'}.$$

12. Aus (13) und (14) läßt sich direkt kein Schluß auf das Verhältnis von T_g zu T_b ziehen, da ja p und f' die Temperatur noch enthalten. Die Bedingung

$$T_g = 2 T_b$$

ist aber nur dann erfüllt, wenn der von T abhängige Faktor in (13) und (14)

$$\frac{p}{f'} = \frac{R T}{v - b} \frac{f}{f'}$$

1) C. Dieterici, a. a. O. S. 703. Vgl. auch Ann. d. Phys. 5. S. 51. 1901; 12. S. 144. 1903.

die Temperatur in dritter Potenz enthält, also wenn f/f' selber proportional mit T^2 wird. Wir müssen also, da f und damit f/f' nur von $v \cdot T$ abhängen sollen, fordern

$$\frac{f}{b'} = c v^2 T^2; \quad \frac{p}{f'} = c R \frac{v^2 T^2}{v - f}.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt integriert, abgesehen von einem konstanten Faktor

$$f(v T) = e^{-\frac{1}{c v T}}.$$

Setzt man $c = R/C$, so wird aus (11) die Dietericische Gleichung (12). Es ist immerhin bemerkenswert, daß diese zweite Dietericische Zustandsgleichung unter allen Gleichungen der Form (11) die einzige ist, die der Bedingung $T_g = 2 T_b$ genügt.

Rostock, 1. August 1919.

(Eingegangen 11. August 1919.)

r
t

n

e
e
n
h